

Збирка задатака из математике  
Економски факултет

Немања Тимотијевић

22. Фебруара 2021. у Београду

[www.ekof-matematika.rs](http://www.ekof-matematika.rs)

# Предговор

Пред читаоцем се налази збирка задатака за Економски факултет у Београду. Збирка садржи задатке са одржаних испита и колоквијума, чиме покрива целокупно градиво за испит и колоквијум. Збирка је настала као последица одржавања приватних часова којима се аутор бави у слободно време, према томе, свако копирање и даље дистрибуирање ове збирке је забрањено.

Збирка обухвата следеће области:

## 1. Матрице

- матричне једначине,
- ранг матрице.

## 2. Системи једначина

- Гаусов алгоритам,
- Крамерово правило,
- Кронекер–Капелијева теорема.

## 3. Граничне вредности

- геометријски низ,
- теорема о уметнутим низовима.

## 4. Испитивање функција

- рационалне,
- експоненцијалне,
- корене,
- логаритамске.

## 5. Интегрални

## 6. Екстремне вредности функција више променљивих

- без услова,
- са условом.

## 7. Диференцијалне једначине

## 8. Диференцијалне једначине

- ДЈ–на која раздваја променљиве,
- линеарна ДЈ–на једначина,
- ДЈ–на другог реда.
- Бернулијева ДЈ–на.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Матрице</b>	<b>4</b>
1.1	Теорија . . . . .	4
1.2	Задаци . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Системи једначина</b>	<b>7</b>
2.1	Гаусов алгоритам . . . . .	7
2.2	Крамерово правило . . . . .	8
2.3	Кронекер – Капелијева теорема . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Граничне вредности функције</b>	<b>11</b>
3.1	Теорија . . . . .	11
3.2	Задаци . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Функције</b>	<b>14</b>
4.1	Теорија . . . . .	14
4.1.1	Домен дефинисаности . . . . .	14
4.1.2	Парност/Непарност . . . . .	14
4.1.3	Нуле и знак функције . . . . .	14
4.1.4	Монотоност и екстремне вредности . . . . .	14
4.1.5	Конвексност, конкавност и превојне тачке . . . . .	14
4.1.6	Асимптоте . . . . .	15
4.1.7	График функције . . . . .	15
4.2	Задаци . . . . .	16
4.2.1	Рационалне функције . . . . .	16
4.2.2	Експоненцијалне функције . . . . .	23
4.2.3	Логаритамске функције . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Диференцијалне једначине</b>	<b>30</b>
5.1	Диференцијална једначина са раздвојеном променљивом . . . . .	30
5.2	Линеарна диференцијална једначина . . . . .	31
5.3	Хомогена диференцијална једначина . . . . .	32
5.4	Бернулијева диференцијална једначина . . . . .	32
5.5	Диференцијалне једначине другог реда . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Диференце једначине</b>	<b>34</b>
6.1	Диференце једначине другог реда . . . . .	34

# 1 Матрице

## 1.1 Теорија

### Дефиниције

(1) Ранг матрице је ред њене највеће квадратне регуларне субматрице(подматрице). Матрица је регуларна ако има инверзну матрицу, тј. ако је њена детерминанта различита од нуле.

(2) Минор ( $M_{i,j}$ ) елемента  $a_{i,j}$  детерминанте реда  $n$  јесте детерминанта реда  $n - 1$  која се добија изостављањем  $i$ -те врсте и  $j$ -те колоне из дате матрице.

(3) Кофактор:  $A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$ .

### Теореме

(1) Детерминанта квадратне матрице  $A$  је једнака нули ако:

1. сви елементи једне врсте(колоне) матрице  $A$  су једнаки нули,
2. матрица  $A$  има две једнаке врсте(колоне),
3. матрица  $A$  има две пропорционалне врсте(колоне).

(2) Елементарне трансформације:

1. замена места двема врстама(колонама),
2. множење једне врсте(колоне) бројем различитим од нула,
3. додавање елемената једне врсте(колоне), претходно, помножене неким бројем, одговарајућим елементима друге врсте(колоне).

(3) Множење матрица није комутативна операција, тј.  $AB \neq BA$ .

(4) Својства по теорми:

1.  $A + B = B + A$
2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$
3.  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
4.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
5.  $A \cdot 0 = 0$
6.  $A + 0 = A$
7.  $A \cdot I = I \cdot A = A$
8.  $(A^T)^T = A$
9.  $(A + B)^T = A^T + B^T = B^T + A^T$
10.  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \neq A^T \cdot B^T$
11.  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}$
12.  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

**Напомена:** детерминанта се може одредити само за квадратну матрицу.

## 1.2 Задачи

1. Одредити детерминанте следећих матрица:

$$(a) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \dots ?$$

$$(b) \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \dots = -372.$$

$$(б) \begin{bmatrix} m^2 & mn \\ mn & n^2 \end{bmatrix} = \dots = 0.$$

$$(г) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \dots = 100.$$

2. Решити следеће матричне једначине:

$$(a) AX = B$$

$$\text{решење: } X = A^{-1}B$$

$$(ђ) (AX + I)^{-1} = B$$

$$\text{решење: } X = (BA)^{-1} \cdot (I - B)$$

$$(б) K + 3X = XAB$$

$$\text{решење: } X = K(A - 3I)^{-1}$$

$$(е) (AX)^{-1} + B = I$$

$$\text{решење: } X = ((I - B) \cdot A)^{-1}$$

$$(в) X^{-1}M = B' - 2B$$

$$\text{решење: } X = M(B'^T - 2B)^{-1}$$

$$(ж) AX^{-1} + B = I$$

$$\text{решење: } X = (I - B)^{-1} \cdot A.$$

$$(г) XA + B = 3M - 2X$$

$$\text{решење: } X = (3M - B) \cdot (A + 2I)^{-1}$$

$$(з) 12(X - 3E)^{-1} = AM$$

$$\text{решење: } X = 12(A \cdot M)^{-1} + 3E$$

$$(д) AX + 3I = B - 2X$$

$$\text{решење: } X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B - 3I)$$

$$(и) A \cdot X = A + 3I$$

$$\text{решење: } X = I + 3A^{-1}$$

3. Одредити све матрице  $X$  које су комутативне са матрицом  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ .

$$\text{решење: } X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}, a, c \in R.$$

4. Решити матричне једначине и одредити матрицу  $X$ :

$$(a) AX = B, \text{ где је } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{решење: } \det A = -1, \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$(б) X \cdot A = B, \text{ где је } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 11 & 13 & 18 \end{bmatrix}.$$

$$\text{решење: } \det A = -2, \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(в)  $AX = X + A$ , где је  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

**решење:**  $\det(A - I) = 1$ ,  $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

5. Матричним методом решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ x + y &= 0 \\ x - z &= 3 \end{aligned}$$

**решење:**  $R = \{(2, -2, -1)\}$

6. Матричним методом решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ 5x + y + 4z &= 7 \end{aligned}$$

**решење:** детерминанта система је једнака нули, што значи да је матрица сингуларна. Како је  $\text{rang} = 2$ , применом теореме о базисном минору узимамо да је  $z = \alpha \in \mathbf{R}$ , па матричним методом решавамо систем:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 - 2\alpha \\ x + y &= 3 - \alpha \end{aligned}$$

одакле се добија да је решење система:  $R = \left\{ \left( \frac{4-3\alpha}{4}, \frac{8-\alpha}{4}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbf{R} \right\}$ .

7. Ако је  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$  и  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ , израчунати  $\det(AB)$ .

**решење:** применом *Cauchy – Binet*-овог својства  $\det(AB) = \det A \cdot \det B = -66 \cdot (-1) = 66$ .

8. Одредити ранг следећих матрица:

(а)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**решење:**  $\text{rang } A = 2$ .

(в)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**решење:**  $\text{rang } A = 2$ .

(б)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

**решење:**  $\text{rang } A = 2$ .

(г)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

**решење:**  $\text{rang } A = 3$ , за  $(\forall a \in \mathbf{R})$ .

$$(д) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

решење:  $\text{rang } A = 2$

$$(е) A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -a & 3 \\ 1 & -8 & 0 & 0 \\ -2 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

решење: за  $a = -3$ ,  $\text{rang } A = 2$ ,  
за  $a \neq -3$ ,  $\text{rang } A = 3$ .

$$(ђ) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

решење:  $\text{rang } A = 3$

$$(ж) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 20 & 0 \\ 22 & 11 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

решење:  $\text{rang } A = 4$

9. Одредити два базисна минора матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

решење: Ако је  $r$  ранг неке матрице  $A$ , онда детерминанту сваке њене подматрице димензија  $r \times r$  називамо базисним минором матрице  $A$ . Дакле, наш задатак је да у датој матрици пронађемо две подматрице типа  $r \times r$  чије су детерминанте различите од нуле.

## 2 Системи једначина

### 2.1 Гаусов алгоритам

1. Применом Гаусовог алгоритма решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ x + y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

решење:  $R = \{(1, 2, -1)\}$

2. Применом Гаусовог алгоритма решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + y + 3z &= 13 \\ -x + 5y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

решење:  $R = \{(1, 2, 3)\}$

3. Применом Гаусовог алгоритма решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y - z &= 4 \\ x + 3y + 3z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

решење:  $R = \emptyset$

4. Применом Гаусовог алгоритма решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 2018x + 1999y + 1999z &= 6035 \\ 1999x + 2018y + 1999z &= 6035 \\ 1999x + 1999y + 2018z &= 5978 \end{aligned}$$

решење:  $R = \{(2, 2, -1)\}$

## 2.2 Крамерово правило

### Крамерово правило

Крамерово правило користимо за решавање квадратних система једначина. Разликујемо три случаја:

1. Ако је  $\Delta \neq 0$  систем је САГЛАСАН и одређен, тј. има јединствено решење.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

2. Ако је  $\Delta = 0$  и бар једна од детерминанти  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  је различита од нуле, систем је несагласан, тј. нема решење.
3. Ако су све детерминанте једнаке нули, тј.  $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = 0$ , систем је НЕОДРЕЂЕН и има или бесконачно много решења или нема решења. Проверавамо Гаусовим или неким другим алгоритмом.

1. Зависно од реалног параметра  $a$  дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ 3x - 2y + 3z &= 1 \\ 7x - 4y + a^2z &= a \end{aligned}$$

**решење:** 1. За  $a \neq 3 \wedge a \neq -3$  систем је сагласан и има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left\{ \left( \frac{a}{a+3}, \frac{a}{a+3}, \frac{1}{a+3} \right) \right\}$$

2. За  $a = 3$  систем има бесконачно много решења:  $(x, y, z) = \{(1 - 3\alpha, 1 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in R\}$

3. За  $a = -3$  систем нема решења:  $R = \emptyset$ .

2. Зависно од реалног параметра  $a$  дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} 2ax - y + 3z &= 4 \\ 3ax - 2y + 2z &= 3a \\ 7ax - 4y + 8z &= 11 \end{aligned}$$

**решење:** 1. За  $a \neq 1$  систем нема решења:  $R = \emptyset$ .

2. За  $a = 1$  систем има бесконачно много решења:  $(x, y, z) = \{(5 - 4\alpha, 6 - 5\alpha, \alpha) \mid \alpha \in R\}$

3. Ако је  $abc \neq 0$ , зависно од осталих вредности реалних параметара  $a, b, c$  дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{aligned} ay + bx &= c \\ cx + az &= b \\ bz + cy &= a \end{aligned}$$

**решење:** систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left\{ \left( \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}, \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \frac{b^2 + a^2 - b^2}{2ab} \right) \right\}$$

4. Зависно од реалног параметра  $a$  дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 3z &= 2 \\ ax + (a - 7)y + z &= 8 \\ 2x + y - z &= 3 \end{aligned}$$

**решење:** 1. За  $a \neq 7$  систем има јединствено решење:  $(x, y, z) = \left\{ \left( \frac{11}{8}, -\frac{11}{8}, -\frac{13}{8} \right) \right\}$ .

2. За  $a = 7$  систем има бесконачно много решења:  $(x, y, z) = \left\{ \left( \frac{8-\alpha}{7}, \frac{5+9\alpha}{7}, \alpha \right) \mid \alpha \in R \right\}$

5. Зависно од реалног параметра  $a$  дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} -x + 3y - (a+1)z &= 0 \\ ax - 3y + 2z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

**решење:** 1. За  $a \neq 1$  систем има јединствено решење:  $R = (0, 0, 0)$ .

2. За  $a = 1$  систем има бесконачно много решења:  $(x, y, z) = \{(3\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in R\}$

6. Зависно од реалног параметра  $a$  дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 3x - 2y + az &= 0 \end{aligned}$$

**решење:** 1. За  $a \neq 3$  систем има јединствено решење:  $R = (0, 0, 0)$ .

2. За  $a = 3$  систем има бесконачно много решења:  $(x, y, z) = \{(-\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in R\}$

7. Зависно од реалних параметара  $p, q$  дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} x + 3y - 4z &= 0 \\ 2x + (p+7)y - 6z &= 1 \\ -x + (p-2)y + (p-1)z &= q+3 \end{aligned}$$

**решење:** 1. За  $p \neq -1 \wedge p \neq 7$  систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left\{ \left( \frac{4pq + 5p + 10q + 41}{(p-7)(p+1)}, \frac{p-2q-11}{p^2-6p-7}, \frac{q+2}{p-7} \right) \right\}$$

2. За  $p = 7 \wedge q = -2$  систем има бесконачно много решења:

$$(x, y, z) = \{(19\alpha + 2, \alpha, -4\alpha + 1/2) \mid \alpha \in R\}$$

3. За  $p = 7 \wedge q \neq -2$  систем нема решење,  $R = \emptyset$

4. За  $p = -1 \wedge q = -6$ , систем има бесконачно много решења

$$(x, y, z) = \left\{ \left( 3\alpha + 2, \alpha, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

5. За  $p = -1 \wedge q \neq -6$  систем нема решење,  $R = \emptyset$

8. Зависно од реалног параметра  $a$  дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} x + 2y - az &= 1 \\ ax + 2y - z &= 2 \\ x + z &= 3 \end{aligned}$$

**решење:** 1. За  $a \neq \frac{4}{3}$  систем нема решење,  $R = \emptyset$

2. За  $a = \frac{4}{3}$  систем има бесконачно много решења:

$$(x, y, z) = \left\{ \left( 3 - \alpha, \frac{-6 + 7\alpha}{6}, \alpha \right) \mid \alpha \in R \right\}$$

### 2.3 Кронекер – Капелијева теорема

Систем линеарних алгебарских једначина је сагласан ако и само као је  $\text{rang } A = \text{rang } A_p$ .

Ако је  $n$  број непознатих, тада важи:

1. ако је  $\text{rang } A = \text{rang } A_p = n$  систем је сагласан и има јединствено решење,
2. ако је  $\text{rang } A = \text{rang } A_p < n$  систем има бесконачно много решења,
3. ако је  $\text{rang } A < \text{rang } A_p$  систем нема решење.

1. Применом Кронекер – Капелијевог теореме у зависности од реалног параметра  $a$  решити систем једначина:

$$\begin{aligned}x - y - 2z &= 0 \\3x + 2y - z &= 0 \\4x + y - 3z &= 0 \\2x + 3y + az &= 0\end{aligned}$$

**решење:** 1. За  $a = 1 \rightarrow \text{rang } A = 2 = \text{rang } A_p < n = 3$  систем има бесконачно много решења:

$$(x, y, z) = \{(\alpha, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in R\}$$

2. За  $a \neq 1 \rightarrow \text{rang } A = 3 = \text{rang } A_p = n = 3$  систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

2. Применом Кронекер – Капелијевог теореме у зависности од реалног параметра  $a$  решити систем једначина:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z + 4t &= 1 \\2x + 2y - z + 2t &= a - 4 \\3x + ay - 5z + &= -5\end{aligned}$$

**решење:** 1. За  $a = 2 \rightarrow \text{rang } A = 2 = \text{rang } A_p < n = 4$ , систем има бесконачно много решења:

$$(x, y, z, t) = \left\{ \left( -3 + 2\alpha + 4\beta, 2 - 3\beta - \frac{7}{2}\alpha, \alpha, \beta \right) \mid \alpha, \beta \in R \right\}$$

2. За  $a \neq 2 \rightarrow \text{rang } A = 3 = \text{rang } A_p < n = 4$ , систем има бесконачно много решења:

$$(x, y, z, t) = \left\{ \left( -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}a + \frac{5}{3}\alpha, -2, \alpha, \frac{5}{3} - \frac{1}{6}a - \frac{7}{6}\alpha \right) \mid \alpha \in R \right\}.$$

3. Дана је матрица  $A$  система  $S$ . Решити систем применом Кронекер – Капелијевог теореме.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

**решење:** Како је  $\text{rang } A = 2 < \text{rang } A_p = 3 \rightarrow$  систем нема решења,  $R = \emptyset$ .

## 3 Граничне вредности функције

### 3.1 Теорија

#### Дефиниције

(1) Појам граничне вредности функције дефинише се као:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

(2) Број  $a \in \mathbf{R}$  је гранична вредност низа  $a_n$  ако за сваку околину тачке  $a$  важи да се ван ње налази само коначно много чланова низа.

(3) Низ  $a_n$  конвергира ако постоји  $a \in \mathbf{R}$  тако да је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

(4) Ако низ има граничну вредност  $+\infty$  или  $-\infty$ , кажемо да низ одређено дивергира, а уколико  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  не постоји, кажемо да низ неодређено дивергира.

Пример низа који неодређено дивергира  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

(5) Геометријски низ:  $a_n = q^n, q \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{не постоји, } & q \leq -1 \end{cases}$$

(6) Неодређени изрази:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

#### Теореме

(1) Теорема о уметнутим низовима (теорема о два полицајца)

Ако је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  и низ  $(c_n)$  задовољава услов  $(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n \geq n_0 \rightarrow a_n < c_n < b_n)$  онда низ  $(c_n)$  конвергира и важи:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

(2) Лопиталово правило

Нека је дат лимес  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Ако је  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$  или ако је  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,

тј.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$  или  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ , тада се може применити Лопиталово правило које каже да

$$\text{је } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Уколико се као резултат лимеса добије  $0 \cdot \infty$  могуће је изразити га као  $\frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$  и онда применити Лопиталово правило.

## Корисно у задацима

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$$

## Шта најбрже тежи бесконачности?

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n!$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n, a > 1$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k, k = \text{const.}$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)$

## Примери:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n^2 + 1)}{n^n} = \dots = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n!} = \dots = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{\ln(1000!)} = \dots = +\infty$$

## Важни лимеси

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \ln(a)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

## 3.2 Задаци

1. Израчунати следеће граничне вредности:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2-x^2}{x^2-4} = \dots = -\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2-x}{x^2-9} = \dots = -\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{3-\sqrt{9-x}} = \dots = +\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - \sqrt{9x^2 + 1}}{x^2 + 1} = \dots = 4$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+4}} = \dots = +\infty$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot \sin(x-2)}{x-2} = \dots = 2$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{x-3} - 1}{x(x-3)} = \dots = \frac{\ln 2}{3}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin 3x)^2 - 1}{x} = \dots = 6$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \dots = 2$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \dots = -1$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x-1}{9-x^2} = \dots = -\infty$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-1}{9-x^2} = \dots = +\infty$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{3x} - 1} = \dots = \frac{2}{3}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x - x^2 - 6}{2x^2 - x - 6} = \dots = \frac{1}{7}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} = \dots = e^4$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1 + 4x}{x^2} = \dots = 8$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 3x - x^2}{1 - x^2} = \dots = 0$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-3x} - 3x - x^2}{x^2} = \dots = \frac{-11}{2}$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos x}{2x^2} = \dots = 0$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x - 1} = \dots = 2$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{x}} = \dots = 0$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sin 5x + 1)^3 - 1}{\sin 3x} = \dots = 5$$

$$(23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\sin x} = \dots = -1$$

$$(24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x) + x^2}{x - 1 + e^x} = \dots = -\frac{1}{2}$$

$$(25) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \dots = 0$$

$$(26) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + x)^2 - 4}{x - 1} = \dots = 4$$

2. Израчунати следећу граничну вредност:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2n]{2}) = \dots = 2$$

3. Израчунати следећу граничну вредност:

$$\left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \dots = 1$$

4. Одредити граничну вредност  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , ако је:

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}$$

**решење:** Применом теореме о уметнутим интервалима добија се решење

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

5. Израчунати следећу граничну вредност:

$$\left( \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) = \dots = \frac{1}{2}$$

6. Израчунати следећу граничну вредност:

$$\left( \frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 14} + \dots + \frac{1}{(6n-4)(6n+2)} \right) = \dots = \frac{1}{12}$$

7. Израчунати следећу граничну вредност:

$$\left( \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)} \right) = \dots = \frac{1}{10}$$

8. Одредити граничну вредност  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ , ако је:

$$X_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 - 2n}} + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 - 2n + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^4 + 3n}}$$

**решење:** Применом теореме о уметнутим интервалима добија се решење

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 1.$$

9. Одредити граничну вредност:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{3}{2x^2}} = \dots = \sqrt[4]{e^3}$$

10. Одредити граничну вредност:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg x \right)^{\frac{1}{x}} = \dots = \frac{\pi}{2}$$

## 4 Функције

### 4.1 Теорија

#### 4.1.1 Домен дефинисаности

У овој тачки проверавамо да ли је функција дефинисана у свакој тачки скупа реалних бројева  $R$ . Важно је напоменути да домен дефинисаности функције морамо узети у обзир приликом одређивања било које тачке у поступку испитивања функције.

Разликујемо следеће случајеве:

(а) Ако је дата рационална функција  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  онда је  $Q(x) \neq 0$ .

(б) Ако је дата логаритамска функција  $\ln(\otimes)$  онда је  $\otimes > 0$ .

(в) Ако је дата корена функција  $\sqrt{\odot}$  онда је  $\odot \geq 0$  (паран корен).

(г) Ако је дата корена функција  $\sqrt[3]{\ominus}$ , онда је она свуда дефинисана (непаран корен).

(д) Ако је дата експоненцијална функција  $e^x$ , онда је она свуда дефинисана.

#### 4.1.2 Парност/Непарност

(а) Ако је  $f(-x) = f(x)$  кажемо да је функција парна и тада је функција симетрична у односу на  $y$ -осу.

(б) Ако је  $f(-x) = -f(x)$  кажемо да је функција непарна и тада је функција симетрична у односу на координатни почетак.

#### 4.1.3 Нуле и знак функције

$f(0) = a \in R \leftrightarrow$  даје тачку  $A(0, a)$  која представља пресек функције са  $y$ -осом.

$y = f(x) = 0 \leftrightarrow$  даје тачку  $B(b, 0)$  која представља пресек функције са  $x$ -осом.

Код одређивања знака функције, цртамо табелу и узимамо у обзир област домена дефинисаности функције. Знак нам говори да ли се функција и на ком сегменту налази изнад или испод  $x$ -осе.

#### 4.1.4 Монотоност и екстремне вредности

У овом кораку радимо први извод функције коју испитујемо. Када одредимо извод, одређујемо знак извода цртајући табелу, а онда из табеле узимамо податке на ком сегменту је функција растућа (за знак +), односно опадајућа (за знак -). Да бисмо одредили екстремне вредности, тј. минимум и максимум, гледамо тачке у табели где функција прво расте до те тачке, а онда опада, и обрнуто. Координате тачака минимума и максимума одређујемо тако што за  $x$  координату узимамо тачку у којој функција прелази из растуће у опадајућу или из опадајуће у растућу, а за  $y$  координату узимамо вредност функције у тој тачки.

#### 4.1.5 Конвексност, конкавност и превојне тачке

Одређујемо други извод функције као извод првог извода, а задим гледамо знак другог извода у табели и на основу тога одређујемо сегменте на коме је функција конвексна или конкавна.

Превојна тачка функције је тачка у којој функција прелази из конкавности у конвексност, односно из конвексности у конкавност.

#### 4.1.6 Асимптоте

(а) Вертикалну асимптоту одређујемо из домена дефинисаности, односно одређујемо је у тачки у којој функција није дефинисана. Формирамо лимес тако да  $x \rightarrow a^\pm$ , при чему је тачка  $a$  тачка у којој функција није дефинисана (нпр.  $Df : x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ ), и ако као резултат лимеса добијемо  $\pm\infty$ , кажемо да је  $x = a$ , вертикална асимптота функције, а уколико резултат лимеса буде неки коначан број, онда кажемо да функција нема вертикалну асимптоту у тој тачки.

Другим речима, ако је  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$ , кажемо да је  $x = a$  вертикална асимптота функције.

(б) Хоризонталну асимптоту одређујемо тако што пустимо да  $x \rightarrow \pm\infty$ . Уколико је резултат лимеса коначан број  $b \in R$ , кажемо да је  $y = b$  хоризонтална асимптота функције. Ако се као резултат лимеса добије  $\pm\infty$ , онда функција нема хоризонталну асимптоту.

Другим речима, ако је  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ ,  $b \in R$ , кажемо да је  $y = b$  хоризонтална асимптота функције.

(в) Косу асимптоту одређујемо из експлицитног облика праве  $y = kx + n$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$$

Коса асимптота не постоји уколико се добије да је:

- $k = 0$ , јер у том случају коса асимптота постаје хоризонтална асимптота ( $y = n$ ).
- $k = \pm\infty$
- $n = \pm\infty$

##### Напомене:

- ако је домен дефинисаности  $Df : x \in (-\infty, +\infty)$ , не постоји вертикална асимптота,
- ако постоји хоризонтална асимптота, онда не испитујемо косу асимптоту јер не постоји,
- ако не постоји хоризонтална асимптота, онда испитујемо постојање косе асимптоте.

#### 4.1.7 График функције

Да бисмо успешно и тачно нацртали график функције, неопходно је да:

- поделу  $x$  и  $y$  осе одаберемо онако како нама одговара и функцији коју испитујемо,
- у график уцртавамо тачке пресека функције са  $x$  и  $y$  осом, екстреме, превојне тачке и асимптоте,
- пратимо знак функције, монотоност и конвексност/конкавнос,
- цртамо график.

## 4.2 Задаци

### 4.2.1 Рационалне функције

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = -1 \rightarrow A(0, -1)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(2, 0), C(-1, 0)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 2)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (-2, -1) \cup (2, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2} = \frac{x(x + 4)}{(x + 2)^2}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (-4, -2) \cup (-2, 0)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$$

$$\max : M_1(-4, -9), \min : M_2(0, -1)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{8}{(x + 2)^3}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (-\infty, -2)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (-2, +\infty)$$

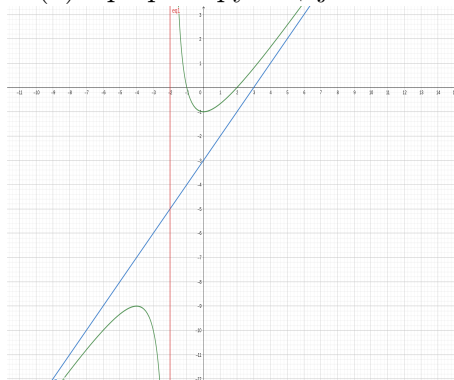
(6) Асимптоте:

$x = -2$  је вертикална асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

$y = -3$  је коса асимптота.

(7) График функције:



2. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

**решење:**

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(x) = 0 \rightarrow A(1, 0)$$

$f(0)$  не може јер функција није дефинисана у нули.

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (1, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^4} = \frac{x^3 + 2}{x^3}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (-\sqrt[3]{2}, 0)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (0, +\infty)$$

$$\text{max} : M_1(-\sqrt[3]{2}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}})$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{-6}{x^4}$$

Функција је конкавна на целом домену.

Нема превојних тачака.

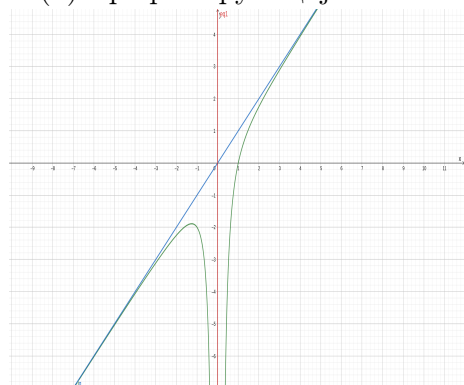
(6) Асимптоте:

$x = 0$  је вертикална асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

$y = x$  је коса асимптота.

(7) График функције:



3. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

**решење:**

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = 0 \rightarrow A(0, 0)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(0, 0)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (0, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{2(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (-3, -1)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$$

$$\text{max} : M_1(-3, -\frac{27}{8})$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (0, +\infty)$$

$$\text{p.t. } P_1(0, 0)$$

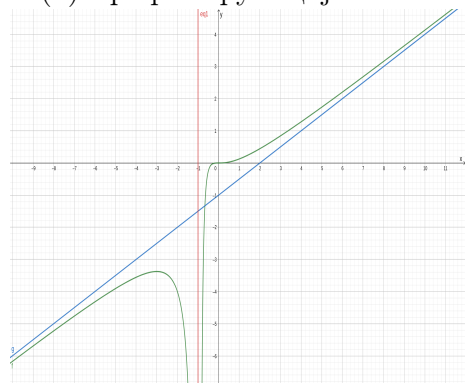
(6) Асимптоте:

$x = -1$  је вертикална асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

$y = \frac{1}{2}x - 1$  је коса асимптота.

(7) График функције:



4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

**решење:**

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{непарна функција.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = 0 \rightarrow A(0, 0)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(0, 0)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (0, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, +\infty)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{4x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$$

$$p.t. P_1 \left( -\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right), P_2(0, 0), P_3 \left( \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

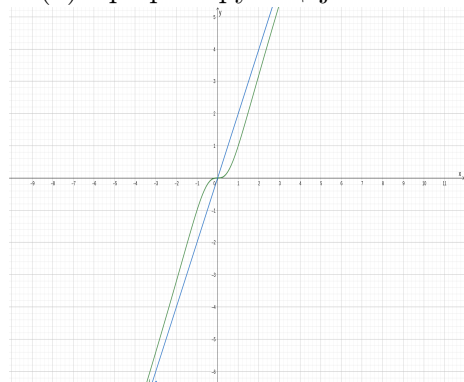
(6) Асимптоте:

Нема вертикалних асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

$y = 2x$  је коса асимптота.

(7) График функције:



5. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

**решење:**

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(x) = 0 \rightarrow A(1, 0), B(2, 0)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (1, 2)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x(3x - 4)}{x^4}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{min} : M_1 \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{8}\right)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{6(2-x)}{x^4}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (2, +\infty)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$$

$$\text{p.t. } P_1(2, 0)$$

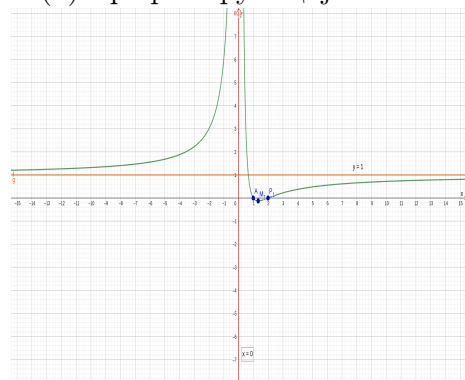
(6) Асимптоте:

$x = 0$  је вертикална асимптота.

$y = 1$  је хоризонталних асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



6. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x-2}{(x-4)^2}$$

**решење:**

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = 0 \rightarrow A\left(0, -\frac{1}{8}\right)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(2, 0)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 2)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (2, 4) \cup (4, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{-x}{(x-4)^3}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (0, 4)$$

$$\min : M_1\left(0, -\frac{1}{8}\right)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{2x+4}{(x-4)^4}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (-\infty, -2)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (-2, 4) \cup (4, +\infty)$$

$$p.t. P_1\left(-2, -\frac{1}{9}\right)$$

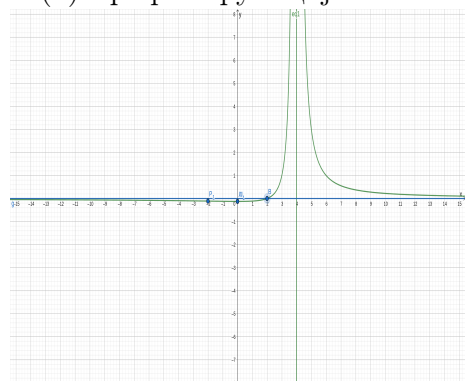
(6) Асимптоте:

$x = 4$  је вертикална асимптота.

$y = 0$  је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



7. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

**решење:**

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = 1 \rightarrow A(0, 1)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(1, 0)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in \emptyset$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (-1, 1)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{max} : M_1(-1, 2), \text{min} : M_2(1, 0)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{4x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f(x) \text{ je } \cap \text{ за } x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

$$f(x) \text{ je } \cup \text{ за } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$$

$$\text{p.t. } P_1\left(-\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right), P_2(0, 1), P_3\left(\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$$

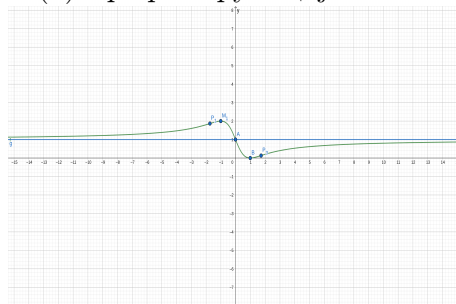
(6) Асимптоте:

Нема вертикалних асимптота.

$y = 1$  је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



## 4.2.2 Експоненцијалне функције

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x-1}$$

**решење:**

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = -1 \rightarrow A(0, -1)$$

$$f(x) \neq 0 \quad (\forall x)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 1)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (1, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{-x \cdot e^{-x}}{(x-1)^2}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, 0)$$

$$\text{max} : M_1(0, -1)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{e^{-x}(x^2 + 1)}{(x-1)^3}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (-\infty, 1)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (1, +\infty)$$

Нема превојних тачака.

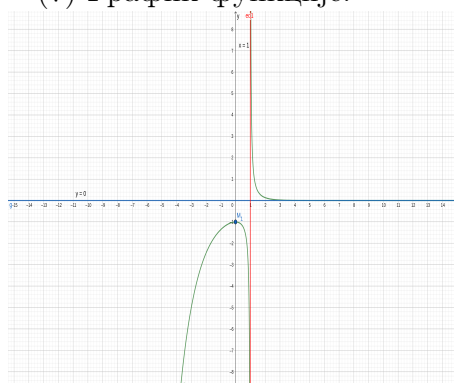
(6) Асимптоте:

$x = 1$  је вертикална асимптота.

$y = 0$  је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

**решење:**

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (0, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in \emptyset$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x + 1)}{(e^x - 1)^3}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (0, +\infty)$$

Нема превојних тачака.

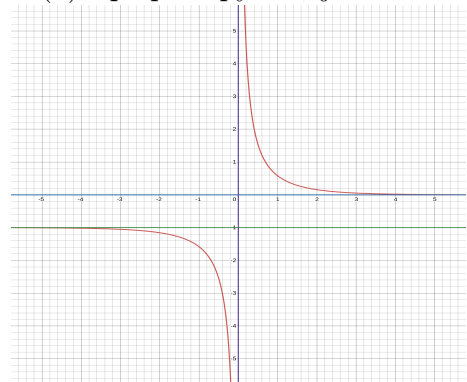
(6) Асимптоте:

$x = 0$  је вертикална асимптота.

$y = 0$ ,  $y = -1$  хоризонталне.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



3. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{непарна функција}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = 0 \rightarrow A(0, 0)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(0, 0)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (0, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\min : M_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}e}\right) \quad \max : M_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}e}\right)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = -2xe^{-x^2} (3 - 2x^2)$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$$

$$p.t. P_1 \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}e^3}\right), P_2(0, 0), P_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}e^3}\right)$$

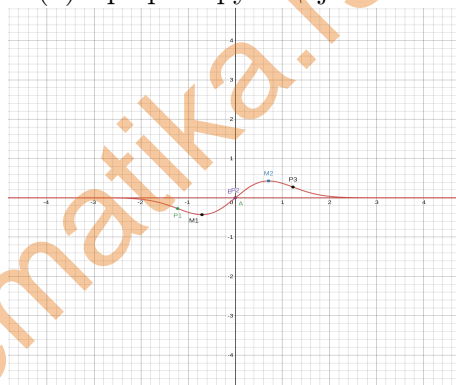
(6) Асимптоте:

Нема вертикалних асимптота.

$y = 0$  је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = (x^2 - 8) \cdot e^x$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = -8 \rightarrow A(0, -8)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(2\sqrt{2}, 0), C(-2\sqrt{2}, 0)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = e^x(x-2)(x+4)$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (-4, 2)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$$

$$\min : M_1(2, -4e^2) \quad \max : M_2\left(-4, \frac{8}{e^4}\right)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = e^x(x^2 + 4x - 6)$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (-2 - \sqrt{10}, -2 + \sqrt{10})$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (-\infty, -2 - \sqrt{10}) \cup (-2 + \sqrt{10}, +\infty)$$

$$p.t. P_1(-2 - \sqrt{10}, e^{-2-\sqrt{10}} \cdot (6 + 4\sqrt{10})) , P_2(-2 + \sqrt{10}, e^{-2+\sqrt{10}} \cdot (6 - 4\sqrt{10}))$$

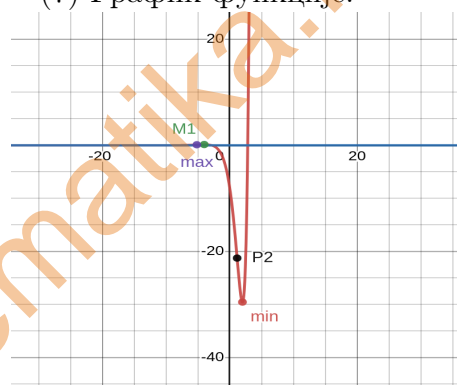
(6) Асимптоте:

Нема вертикалних асимптота.

$y = 0$  је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



5. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$$

**решење:**

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = -\frac{1}{3} \rightarrow A \left(0, -\frac{1}{3}\right)$$

$$f(x) \neq 0 \rightarrow \text{нeма}$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (-1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (3, +\infty)$$

$$\min : M_1 \left(3, -\frac{e^3}{6}\right) \quad \max : M_2 \left(-1, -\frac{1}{2e}\right)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{e^x \cdot (x^4 - 4x^3 + 12x + 15)}{(x^2 - 3)^3}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

p.t. нeма

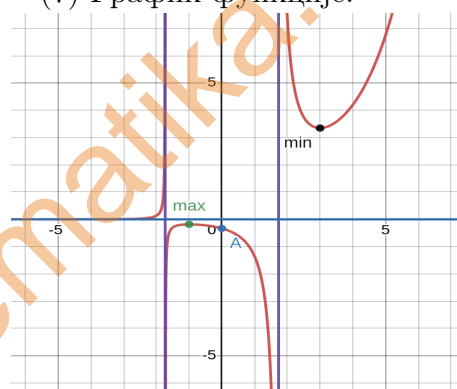
(6) Асимптоте:

$x = \pm\sqrt{3}$  су хоризонталне асимптоте.

$y = 0$  је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



### 4.2.3 Логаритамске функције

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow$  ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$$f(0) \neq 0 \rightarrow \text{нета}$$

$$f(x) \neq 0 \rightarrow \text{нета}$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (1, +\infty)$$

$$\text{min} : M_1(1, 1)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x(1 + \ln x)^3}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$$

$$\text{p.t. } P_1\left(e, \frac{e}{2}\right)$$

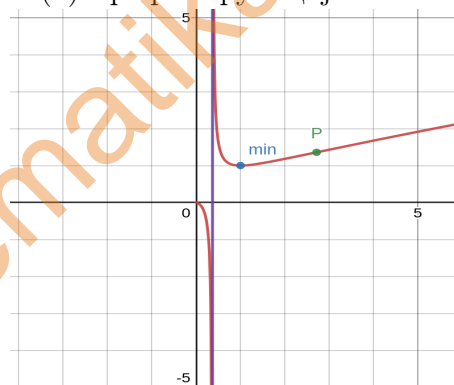
(6) Асимптоте:

$x = \frac{1}{e}$  је вертикална асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln^2 x - 4 \ln x + 3$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (0, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow$  ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$$f(0) \neq 0 \rightarrow \text{нета}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow A(e, 0), B(e^3, 0)$$

$$f(x) < 0 \text{ за } x \in (e, e^3)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (0, e) \cup (e^3, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - 4}{x}$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (0, e^2)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (e^2, +\infty)$$

$$\text{min} : M_1(e^2, -1)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{6 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in (e^3, +\infty)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in (0, e^3)$$

$$\text{p.t. } P_1(e^3, 0)$$

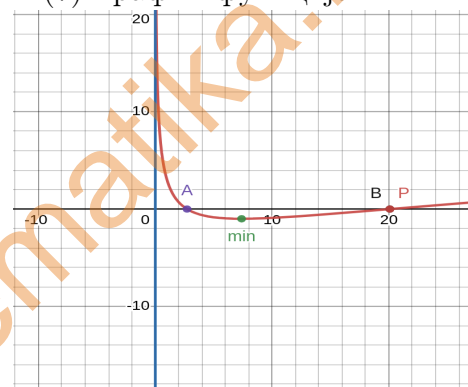
(6) Асимптоте:

$x = 0$  је вертикална асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



## 5 Диференцијалне једначине

### 5.1 Диференцијална једначина са раздвојеном променљивом

Једначина облика  $y' = f(x) \cdot g(y)$  представља диференцијалну једначину са раздвојеном променљивом.

Овај тип диференцијалне једначине решавамо на следећи начин:

1. заменимо  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,
2. све по  $y$  пребацимо на леву страну, а све по  $x$  на десну страну,
3. урадимо интеграл леве и десне стране.

**Задатак.** Одредити опште решење следећих диференцијалних једначина:

[1.]  $yy' - x = 0$

**решење:**  $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$

[2.]  $2x^2yy' + y^2 = 2$

**решење:**  $y = \pm\sqrt{-e^{\frac{1}{x}} - C} + 2$

[3.]  $y' - x^2 = y(x^2y + x^2 - 2y')$

**решење:**  $\ln(y^2 + y + 1) = \frac{1}{3}x^3 + C$

[4.]  $x(1 + y^2) = yy'$

**решење:**  $y = \pm\sqrt{e^{x^2+C_1} - 1}$

[5.]  $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

**решење:**  $-\sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$

[6.]  $(x^3 - 2x^2 + x - 2)y' = y(2x^2 + 3x - 4)$

**решење:**  $\ln|y| = 2\ln|x-2| + 3\operatorname{arctg}x + C$

[7.]  $y' = 2y^2 + 12y + 22 + (x^2 + 3x)y'$

**решење:**  $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{y+3}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left(\frac{2x-3-\sqrt{13}}{2x-3+\sqrt{13}}\right) + C$

[8.]  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dy + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dx = 0$

**решење:**  $\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1-y^2}-1}{\sqrt{1-y^2}+1}\right) = -\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right) + C$

[9.]  $y' + y\sin x = \sin x$

**решење:**  $y = 1 + C_2e^{\cos x}$

[10.]  $(8y^2 - 12y + 2)y' = xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x$

**решење:**  $2\ln|y-2| + 3\ln(y^2+1) = \frac{x^2}{2} + C$

## 5.2 Линеарна диференцијална једначина

Једначина облика

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

назива се линеарна диференцијална једначина.

Опште решење ове једначине је:

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} \left( C + \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx \right)$$

**Задатак.** Одредити опште решење следећих диференцијалних једначина:

[1.]  $y' - 2xy = (x - x^3) e^{x^2}$

**решење:**  $y(x) = e^{x^2} \left( C + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)$

[2.]  $xy' - x^2 + 2y = 0$

**решење:**  $y(x) = \frac{1}{x^2} \left( C + \frac{x^4}{4} \right)$

[3.]  $xy' + 2y + x = x^2 + 1$

**решење:**  $y(x) = \frac{3x^4 + 6x^2 - 4x^3 + C}{12x^2}$

[4.]  $2x(x^2 + y) dx = dy$

**решење:**  $y(x) = Ce^{x^2} - x^2 - 1$

[5.]  $y' + y \sin x - e^{\cos x} = 0$

**решење:**  $y(x) = e^{\cos x} (C + x)$

[6.]  $xy' - 2y = 2x^4$

**решење:**  $y(x) = x^2 (C + x^2)$

[7.]  $(xy + e^x) dx = xdy$

**решење:**  $y(x) = e^x (C + \ln |x|)$

[8.]  $xy' = y + x^2 \cos x$

**решење:**  $y(x) = x (C + \sin x)$

### 5.3 Хомогена диференцијална једначина

Једначина облика

$$y = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

назива се хомогена диференцијална једначина.

Увођењем смене

$$z = \frac{y}{x}$$

своди се на диференцијалну једначину која раздваја променљиве.

**Задатак.** Одредити опште решење следећих диференцијалних једначина:

[1.]  $xy' = y + x\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right)$

**решење:**  $e^{\frac{y}{x}} + 1 = C_1x$

[2.]  $y'x + y \ln x = y + y \ln y$

**решење:**  $y(x) = xe^{C_1x}$

[3.]  $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

**решење:**  $2 \ln y - \ln x + \frac{y}{x} = C$

### 5.4 Бернулијева диференцијална једначина

Једначина облика

$$y' + P(x)y = Q(x)y^s$$

назива се Бернулијева диференцијална једначина.

Увођењем смене

$$z = y^{1-s}$$

своди се на линеарну диференцијалну једначину.

**Задатак.** Одредити опште решење следећих диференцијалних једначина:

[1.]  $xy' + 2y = \sqrt{y}$

**решење:**  $y(x) = \frac{1}{x^2} \left(C + \frac{1}{2}x\right)^2$

[2.]  $2y' + y^3x = y$

**решење:**  $y(x) = \sqrt{\frac{e^x}{xe^x - e^x + C}}$

[3.]  $y' - y = 2x^2 \sqrt{y}$

**решење:**  $y(x) = (Ce^{\frac{x}{2}} - 2x^2 - 8x - 16)^2$

## 5.5 Диференцијалне једначине другог реда

Једначина облика

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

назива се линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима.

**Задатак 1.** Одредити опште решење следећих диференцијалних једначина:

[1.]  $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$

**решење:**  $y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x} + \left(-\frac{1}{12}x + \frac{1}{144}\right)e^{-2x}$

[2.]  $y'' + y' - 6y = (3 - 4x)e^x$

**решење:**  $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + xe^x$

[3.]  $y'' + 2y' + y = (1 + x)e^{-x}$

**решење:**  $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{x^3e^{-x}}{6} + \frac{x^2e^{-x}}{2}$

[4.]  $y'' - 2y' + y = x^2e^x$

**решење:**  $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^4e^x}{12}$

**Задатак 2.** Одредити опште решење следећих диференцијалних једначина:

[1.]  $y'' - 2y' - 3y = e^x \cos 2x$

**решење:**  $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{e^x \cos 2x}{8}$

[2.]  $y'' - 3y' - 4y = \sin x$

**решење:**  $y(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} + \frac{3}{34} \cos x - \frac{5}{34} \sin x$

**Задатак 3.** Одредити опште решење следећих диференцијалних једначина:

[1.]  $y'' + 9y = 4 \sin 3x$

**решење:**  $y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{2}{3} \cos 3x$

[2.]  $y'' + y = 6 \cos 2x$

**решење:**  $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2 \cos 2x$

**Задатак 4.** Одредити опште решење следећих диференцијалних једначина:

[1.]  $y'' - 4y' + 3y = (1 - x)e^{2x} + x$

**решење:**  $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^x + xe^{2x} - e^{2x} + \frac{x}{3} + \frac{4}{9}$

## 6 Диференцне једначине

### 6.1 Диференцне једначине другог реда

**Задатак 1.** Наћи опште решење диференцне једначине  $2y_{t+2} - 3y_{t+1} - 2y_t = 6$ . Одредити партикуларно решење уз услове  $y_0 = 0$  и  $2y_1 = -1$  и коментарисати његово понашање када се параметар  $t$  неограничено увећава.

**решење:**

$$y_t = C_1 (2)^t + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t - 2$$

$$y_p = 2^t + \left(-\frac{1}{2}\right)^t - 2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_p = \left(2^t + \left(-\frac{1}{2}\right)^t - 2\right) = +\infty$$

**Задатак 2.** Наћи опште решење диференцне једначине  $6y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 8$ . Одредити партикуларно решење уз услове  $y_0 = 1$  и  $2y_1 = -1$  и коментарисати његово понашање када се параметар  $n$  неограничено увећава.

**решење:**

$$y_n = C_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

$$y_p = \frac{12}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{17}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_p = \left(\frac{12}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{17}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) = 2$$

**Задатак 3.** Наћи опште решење диференцне једначине  $28y_{t+2} + 29y_{t+1} + 6y_t = 2$ . Одредити партикуларно решење уз услове  $y_0 = 1$  и  $2y_1 = -1$  и коментарисати његово понашање када се параметар  $t$  неограничено увећава.

**решење:**

$$y_t = C_1 \left(-\frac{3}{4}\right)^t + C_2 \left(-\frac{2}{7}\right)^t + \frac{2}{63}$$

$$y_p = \frac{50}{91} \left(-\frac{3}{4}\right)^t + \frac{49}{117} \left(-\frac{2}{7}\right)^t + \frac{2}{63}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_p = \left(\frac{50}{91} \left(-\frac{3}{4}\right)^t + \frac{49}{117} \left(-\frac{2}{7}\right)^t + \frac{2}{63}\right) = \frac{2}{63}$$

**Задатак 4.** Наћи опште решење диференцне једначине  $2y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 1$ . Одредити партикуларно решење уз услове  $y_0 = 0$  и  $2y_1 = -1$  и коментарисати његово понашање када се параметар  $t$  неограничено увећава.

**решење:**

$$y_t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1$$

$$y_p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_p = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1\right) = 1$$