

Екоф математика

Немања Тимотијевић

www.ekof-matematika.rs

IG: ekof_matematika

22. Фебруара 2022. у Београду

Предговор

На овој страници можете пронаћи примере испитних задатака из неодређених, одређених, површинских и двојних интеграла. Сви задаци су добијени од стране студената који су изашли на испите. Ово није званични сајт факултета. Аутори решења ових задатака су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм [ekof_matematika](https://www.instagram.com/ekof_matematika). Аутори су отворени за све врсте премедби и сугестија на решења задатака.

Измене у документу

15. Августа, 2022. [15:01h]

Додати задаци из неодређених(од 42. до 44. задатка), површинских(47. задатак) и двојних интеграла(од 51. до 59. задатка).

18. Децембра, 2022. [23:09h]

Додати задаци из неодређених интеграла(од 45. до 64.)

23. Децембра, 2022. [19:36h]

Додати задаци из:

- неодређених интеграла(од 65. до 75.)
- несвојствених интеграла(од 79. до 81.)
- одређених интеграла(од 82. до 84.)
- површинских интеграла(од 89. до 90.)

1 Неодређени интеграли

1.1 Дефиниција

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

1.2 Таблица интеграла

$$(1) \int dx = x + C$$

$$(2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$(3) \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$(10) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

$$(11) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + C$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C$$

$$(13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

1.3 Примери

$$[1.] \int 10x^2 dx = \dots\dots\dots = \frac{10}{3}x^3 + C$$

$$[2.] \int (6x + 15) dx = \dots\dots\dots = 3x^2 + 15x + C$$

$$[3.] \int \left(x^3 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \dots\dots\dots = \frac{1}{4}x^4 + \operatorname{tg} x + C$$

$$[4.] \int \left(2x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \dots\dots\dots = x^2 - \arcsin x + C$$

$$[5.] \int \left(10^x - \frac{3}{2}\sqrt{x} + 2x\right) dx = \dots\dots\dots = \frac{10^x}{\ln 10} - x\sqrt{x} + x^2 + C$$

$$[6.] \int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x - 2}{\sqrt{x}} dx = \dots\dots\dots = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{8}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + C$$

$$[7.] \int \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 dx = \dots\dots\dots = x + 6 \ln|x| - \frac{9}{x} + C$$

$$[8.] \int \operatorname{tg}^2 x dx = \dots\dots\dots = \operatorname{tg} x - x + C$$

$$[9.] \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \dots\dots\dots = x - \operatorname{arctg} x + C$$

$$[10.] \int (x-1) \sqrt[7]{8-2x+x^2} dx = \dots\dots\dots = \frac{7}{16} \sqrt[7]{(8-2x+x^2)^8} + C$$

$$[11.] \int \frac{\ln x}{x} dx = \dots\dots\dots = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

$$[12.] \int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \dots\dots\dots = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$[13.] \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \dots\dots\dots = \ln(e^x + 1) + C$$

$$[14.] \int e^{x+e^x} dx = \dots\dots\dots = e^{e^x} + C$$

$$[15.] \int x \cos x dx = \dots\dots\dots = x \sin x + \cos x + C$$

$$[16.] \int e^x \sin(4x) dx = \dots\dots\dots = -\frac{4e^x \cos(4x)}{17} + \frac{e^x \sin(4x)}{17} + C$$

$$[17.] \int e^{5x} \cos(6x) dx = \dots\dots\dots = \frac{6e^{5x} \sin(6x)}{61} + \frac{5e^{5x} \cos(6x)}{61} + C$$

$$[18.] \int \arcsin^2 x dx = \dots\dots\dots = x \cdot \arcsin^2(x) + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin(x) - 2x + C$$

$$[19.] \int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx = \dots\dots\dots = 6 \left(\frac{1}{4} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} \right) + C$$

$$[20.] \int x^2 \cos x dx = \dots\dots\dots = (x^2 - 2) \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) + C$$

[21.] $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx = \dots = 2e^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x^5} - 5x^2 + 20\sqrt{x^3} - 60x + 120\sqrt{x} - 120 \right) + C$

[22.] $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{e^x} dx = \dots = -(x^2 + 2)e^{-x} + C$

[23.] $\int \frac{6x - 1}{x^2(2x - 1)} dx = \dots = 4 \ln \left| \frac{2x - 1}{x} \right| - \frac{1}{x} + C$

[24.] $\int \frac{6x - 1}{x^3(2x - 1)} dx = \dots = 8 \ln \left| \frac{2x - 1}{x} \right| + \frac{8x - 1}{2x^2} + C$

[25.] $\int \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} dx = \dots = 2 \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{x} \ln(1 + x^2) + C$

[26.] $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} = \dots = -\ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right) + C$

[27.] $\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^2} dx = \dots = 2\sqrt{x+1} - 2 + 4 \ln \left| \sqrt{x+1} - 1 \right| - \frac{2}{\sqrt{x+1}-1} + C$

[28.] $\int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx = \dots = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$

[29.] $\int \frac{8x^2 - 12x + 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx = \dots = 2 \ln |x - 2| + 3 \ln(x^2 + 1) + C$

[30.] $\int \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx = \dots = 2 \ln |x - 2| + 3 \operatorname{arctg}(x) + C$

[31.] $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x - \cos^4 x} dx = \dots = \frac{1}{4} \ln |\sin^4 x - \cos^4 x| + C$

[32.] $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \dots = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C$

[33.] $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \dots = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{7}} \right) + C$

[34.] $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \dots = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3x - 3}{3x + 1} \right| + C$

[35.] $\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 1} dx = \dots = \ln(e^x) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2e^x - 1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} - e^x + 1) + C$

[36.] $\int \arcsin(x) dx = \dots = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2} + C$

[37.] $\int \frac{\arccos(x)}{x^2} dx = \dots = -\frac{1}{x} \arccos(x) + \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right) + C$

[38.] $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = \dots = (x + 1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$

[39.] $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = \dots = \frac{\ln |x| - 27 \ln |x - 2| + 56 \ln |x - 3|}{6} + x + C$

[40.] $\int \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| dx = \dots = x \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| + \ln |x^2 - 1| + C$

[41.] $\int \frac{x \sqrt[3]{x+2}}{x + \sqrt[3]{x+2}} dx = 3 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4} \ln |t-1| + \frac{5}{8} \ln (t^2 + 2t + 2) - \frac{9}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) \right) + C$

[42.] $\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x^4} e^{\frac{1}{x}} dx = \dots = \frac{7x^2 - 8x + 3}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + C$

[43.] $\int \sqrt{6x - x^2} dx = \dots = \frac{x-3}{2} \sqrt{6x - x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x-3}{3} + C$

[44.] $\int \ln(2x+3) dx = \dots = x \ln |2x+3| - x + \frac{3}{2} \ln |2x+3| + C$

[45.] $\int (5x^5 + x^2) e^{x^3} dx = \dots = \frac{1}{3} (5x^3 - 4) e^{x^3} + C$

[46.] $\int \frac{x+4}{x^4 + 9x^2} dx = \dots = \frac{\ln x}{9} - \frac{4}{9x} - \frac{\ln(x^2+9)}{18} - \frac{4}{27} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$

[47.] $\int x e^x \sin x dx = \dots = \frac{e^x (x \sin x + (1-x) \cos x)}{2} + C$

[48.] $\int \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = \dots = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$

[49.] $\int \frac{9x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{x^4 - x^3 + x^2 - x} dx = \dots = 4 \ln |x| + 3 \ln |x-1| + \ln(x^2+1) + C$

[50.] $\int \frac{x^3 - 2}{x(x^2+1)} dx = \dots = x - 2 \ln |x| + \ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C$

[51.] $\int \frac{(x+1)^3}{x^2 + 2x - 3} dx = \dots = \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln |x^2 + 2x - 3| + C$

[52.] $\int \frac{e^{3x}}{e^x + 2} dx = \dots = \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4 \ln(e^x + 2) + C$

[53.] $\int \frac{21x^2 - 80x + 48}{x^3 - 6x^2 + 8x} dx = \dots = 6 \ln |x| + 7 \ln |x-2| + 8 \ln |x-4| + C$

[54.] $\int \frac{6x^2 - 2x - 2}{x^3 - x} dx = \dots = 2 \ln |x| + \ln |x-1| + 3 \ln |x+1| + C$

[55.] $\int \frac{e^{2x} + e^x}{(e^x + 2)(e^{2x} + 1)} dx = \dots = \frac{\ln(e^{2x} + 1) + 6 \operatorname{arctg} e^x - 2 \ln(e^{2x} + 2)}{10} + C$

[56.] $\int (2x+1) e^{\operatorname{arctg} x} dx = \dots = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} + C$

[57.] $\int \frac{x^7}{x^4 - 1} dx = \dots = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln |x^4 - 1| + C$

[58.] $\int \frac{21x^2 - 94x + 72}{x^3 - 7x^2 + 12x} dx = \dots = 6 \ln |x| + 7 \ln |x-3| + 8 \ln |x-4| + C$

[59.] $\int \sqrt{\frac{1-x}{x^4(1+x)}} dx = \dots = -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} + \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right) + C$

[60.] $\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx = \dots = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{2+x} \right)^2} + C$

[61.] $\int \sin 2x e^{3x} dx = \dots = -\frac{2e^{3x} \cos 2x}{13} + \frac{3e^{3x} \sin 2x}{13} + C$

$$[62.] \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}} = \dots = 3 \left(\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2} - \sqrt[3]{x+1} + \ln \left| \sqrt[3]{x+1} + 1 \right| \right) + C$$

$$[63.] \int x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx = \dots = \frac{x^2}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$[64.] \int \frac{2x \operatorname{arctg} x^2}{1+x^4} dx = \dots = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x^2)^2 + C$$

$$[65.] \int \sin \sqrt{x} dx = \dots = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$$

$$[66.] \int (x^3 + x)e^{-x^2} dx = \dots = -\frac{1}{2} (x^2 + 2) e^{-x^2} + C$$

$$[67.] \int x^2 \operatorname{arctg} x dx = \dots = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$[68.] \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \dots = \operatorname{arctg}(x+2) + C$$

$$[69.] \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx = \dots = \frac{(x-2)\sqrt{2x-1}}{3} + C$$

$$[70.] \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} e^x dx = \dots = \frac{e^x}{\cos x} + C$$

$$[71.] \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x} e^x dx = \dots = \frac{e^x}{\sin x} + C$$

$$[72.] \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx = \dots = \frac{1}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^3} + C$$

$$[73.] \int \frac{dx}{x^4 + x^3 + x^2} = \dots = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$[74.] \int \frac{1}{x+1} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} dx = \dots = -\ln|t-1| + \frac{1}{2} \ln(t^2 + t + 1) - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$[75.] \int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \dots = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

2 Несвојствени интегралы

$$[76.] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-e^x} dx = \dots = 1$$

$$[77.] \int_{-\infty}^0 x e^x dx = \dots = -1$$

$$[78.] \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \dots = \frac{\pi}{2}$$

$$[79.] \int_1^3 \frac{dx}{x \ln x} = \dots = +\infty$$

$$[80.] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x-e^{-x}} dx = \dots\dots\dots = 1$$

$$[81.] \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+4)} = \dots\dots\dots = \frac{\ln 4}{3}$$

3 Одређени интеграли

3.1 Дефиниција

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

3.2 Примери

$$[82.] \int_2^{e+1} x \ln(x-1) dx = \dots\dots\dots = \frac{e^2 + 5}{4}$$

$$[83.] \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = \dots\dots\dots = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

$$[84.] \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}} = \dots\dots\dots = \frac{3}{2}$$

4 Површински интеграли

[85.] Израчунати површину ограничену луком горње функције $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{x-7}$ и њеном косом асимптотом над $[8, 9]$.

решење:

$$P = 16 \ln(2)$$

[86.] Израчунати површину ограничену луком горње функције $f(x) = \frac{x^2-2x-15}{x-6}$ и њеном косом асимптотом над $[7, 8]$.

решење:

$$P = 9 \ln(2)$$

[87.] Израчунати површину ограничену луком горње функције $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-7}$ и њеном косом асимптотом над $[8, 9]$.

решење:

$$P = 36 \ln(2)$$

[88.] Израчунати површину ограничену графиком функције $f(x) = e^{x-e^x}$ и x -осом.

решење:

$$P = 1$$

[89.] Израчунати површину ограничену кривом $f(x) = \frac{3x^2}{x^3-1}$ и x -осом на интервалу $[-1, \frac{1}{2}]$

решење:

$$P = \ln \frac{16}{7}$$

5 Двојни интеграли

[90.] Израчунати интеграл

$$\iint_D dx dy$$

где је област D унутрашњост трапеза са теменима $A(-1, -1)$, $B(6, -1)$, $C(3, 2)$, $D(2, 2)$.

решење:

$$I = 12$$

[91.] Израчунати интеграл

$$\iint_D x dx dy$$

где је област D унутрашњост троугла са теменима $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$, $C(3, -1)$.

решење:

$$I = 4$$

[92.] Израчунати интеграл

$$\iint_D dx dy$$

где је област D унутрашњост троугла са теменима $A(1, -4)$, $B(4, -1)$, $C(-1, 4)$.

решење:

$$I = 15$$

[93.] Израчунати интеграл

$$\iint_D dx dy$$

где је област D унутрашњост троугла са теменима $A(1, 2)$, $B(2, -1)$, $C(4, 4)$.

решење:

$$I = \frac{11}{2}$$

[94.] Израчунати интеграл

$$\iint_D xy dx dy$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 9 + 8y$ у IV квадранту.

решење:

$$I = -\frac{19}{24}$$

[95.] Израчунати интеграл

$$\iint_D xy dx dy$$

где је област D ограничена луком криве $x^2 + y^2 = 9 + 8y$ у II квадранту.

решење:

$$I = -\frac{2673}{8}$$

[96.] Израчунати интеграл

$$\iint_D (x + 2y) dx dy$$

где је област D унутрашњост ограничена кривама $y = x^2$ и $x = y^2$.

решење:

$$I = \frac{9}{20}$$

[97.] Израчунати интеграл

$$\iint_D x e^{y^2} dx dy$$

где је област D унутрашњост ограничена кривама $y = x^2$, $x = 0$ и $y = 4$ у I квадранту.

решење:

$$I = \frac{1}{4}(e^{16} - 1)$$

[98.] Израчунати интеграл

$$\iint_D (y + yx) dx dy$$

где је област D унутрашњост ограничена кривама $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 2x$ у I квадранту.

решење:

$$I = \frac{5}{16}$$