Економски факултет
Септембар 2020.

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

20. Августа 2020. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из Септембра 2020. године. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

Задаци

1. Испитати ток и скицирати график функције

$f(x) = (3 - x^2) \cdot e^{-x}$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$Df : x \in (-\infty, +\infty)$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow$ ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$f(0) = 3 \to A\,(0, 3)$

$f(x) = 0 \to B\left(-\sqrt{3}, 0\right), \, C\left(\sqrt{3}, 0\right)$

$f(x) < 0 \;\; za \;\; x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

$f(x) > 0 \;\; za \;\; x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$f'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 3)$

$f(x) \uparrow \; za \; x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

$f(x) \downarrow \; za \; x \in (-1, 3)$

$max : M_1\,(-1, 2e) \;\; min : M_2(3, -6e^{-3})$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$f''(x) = e^{-x}(-x^2 + 4x + 1)$

$f(x) \; je \; \cap \; za \; x \in \left(-\infty, 2 - \sqrt{5}\right) \cup \left(2 + \sqrt{5}, +\infty\right)$

$f(x) \; je \; \cup \; za \; x \in \left(2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\right)$

$p.t. \;\; P_1\left(2 - \sqrt{5}, (4\sqrt{5} - 6)e^{\sqrt{5}-2}\right), P_2\left(2 + \sqrt{5}, (-4\sqrt{5} - 6)e^{-\sqrt{5}-2}\right)$

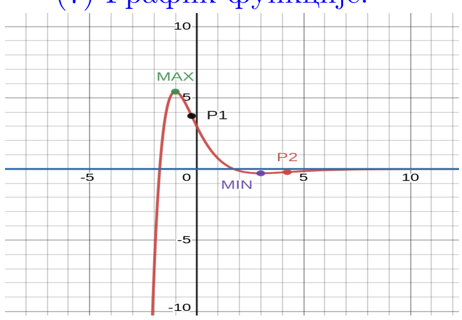
(6) Асимптоте:

Нема вертикалних асимптота.

$y = 0$ је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Израчунати несвојствени интеграл

$$I = \int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$$

решење:

$$I = 2\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

3. Наћи опште решење диференцне једначине $2y_{t+2} - 7y_{t+1} + 3y_t = 6$. Одредити партикуларно решење уз услове $y_0 = 0$ и $y_1 = -\frac{1}{2}$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.

решење:

$$y_t = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2\,(3)^t - 3$$

$$y_p = \frac{13}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{2}{5}3^t - 3$$

$$\lim_{t\to+\infty} y_p = \left(\frac{13}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{2}{5}3^t - 3\right) = +\infty$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{36}{x} + \frac{81}{y} + x + y + 1$$

решење:

Тачка $M(6,9)$ је локални минимум, где је $z_{min} = 31$.
Тачка $N(-6,-9)$ је локални максимум, где је $z_{max} = -29$.
Тачка $P(-6,9)$ је седласта тачка, није екстрем.
Тачка $Q(6,-9)$ је седласта тачка, није екстрем.

5. Дискутовати решење система једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & 2ay & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

решење:

1. За $a \neq 1$ систем има јединствено решење: $(x,y,z) = \left\{\left(0,0,\frac{1}{2}\right)\right\}$.

2. За $a = 1$ систем има бесконачно много решења: $(x,y,z) = \left\{\left(\frac{2\alpha-1}{3}, \frac{2-4\alpha}{3}, \alpha\right) \mid \alpha \in R\right\}$.