

Економски факултет
Октобар 2020.

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

29. Септембра 2020. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из Октобра 2020. године. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм [ekof_matematika](https://www.instagram.com/ekof_matematika). Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

Задаци

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{x-e^x}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow \text{ни парна, ни непарна.}$$

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = \frac{1}{e} \rightarrow A \left(0, \frac{1}{e} \right)$$

$$f(x) > 0 \text{ за } x \in (-\infty, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = e^{x-e^x} (1 - e^x)$$

$$f(x) \uparrow \text{ за } x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) \downarrow \text{ за } x \in (0, +\infty)$$

$$\text{max} : M \left(0, \frac{1}{e} \right)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = e^{x-e^x} (1 - 3e^x + e^{2x})$$

$$f(x) \text{ је } \cap \text{ за } x \in \left(\ln \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \ln \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$f(x) \text{ је } \cup \text{ за } x \in \left(-\infty, \ln \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$$

$$\text{p.t. } P_1 \left(\ln \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \right), P_2 \left(\ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right)$$

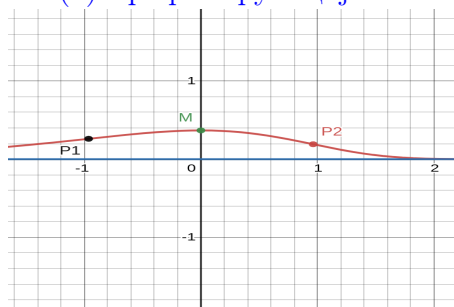
(6) Асимптоте:

Нема вертикалних асимптота.

$y = 0$ је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Израчунати несвојствени интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

решење:

$$I = \frac{\pi}{2}$$

3. Наћи опште решење диференчне једначине $2y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 1$. Одредити партикуларно решење уз услове $y_0 = 0$ и $y_1 = -\frac{1}{2}$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.

решење:

$$y_t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1$$

$$y_p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_p = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1\right) = 1$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \text{uslov} : 18x^2 + 18y^2 = x^2y^2$$

решење:

Тачка $M(6, 6)$, $\lambda = -\frac{1}{6}$ је локални максимум, где је $z_{max} = \frac{1}{3}$.

Тачка $N(-6, -6)$, $\lambda = \frac{1}{6}$ је локални минимум, где је $z_{min} = -\frac{1}{3}$.

5. Испитати да ли је релација ρ дефинисана условом

$$x\rho y \iff x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

релација еквиваленције на скупу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Уколико јесте, одредити класу еквиваленције броја 3.

решење:

Јесте релација еквиваленције.

Класа еквиваленције броја 3: $C_3 = \left\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3\right\}$