Економски факултет
Јануар 2024.
група 2302

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

08. Јануара, 2024. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из јануара 2024. године, група 2302. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

Задаци

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 6}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow$ ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = -\frac{5}{3} \rightarrow A\left(0, -\frac{5}{3}\right)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(5,0),\ C(2,0)$$

$$f(x) < 0\ za\ x \in (-\infty, 2) \cup (5, 6)$$

$$f(x) > 0\ za\ x \in (2, 5) \cup (6, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 12x + 32}{(x-6)^2}$$

$$f(x) \uparrow\ za\ x \in (-\infty, 4) \cup (8, +\infty)$$

$$f(x) \downarrow\ za\ x \in (4, 6) \cup (6, 8)$$

$$min : M_1(8, 9),\ \ max : M_2(4, 1)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-6)^3}$$

$$f(x)\ je \cap\ za\ x \in (-\infty, 6)$$

$$f(x)\ je \cup\ za\ x \in (6, +\infty)$$

$$p.t.\ \ nema$$

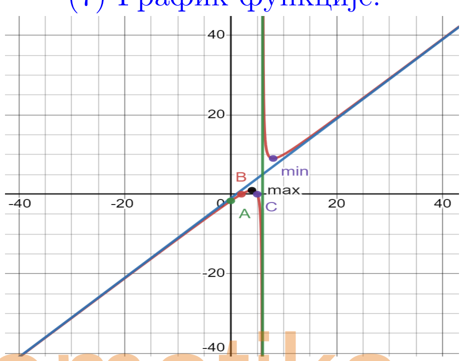
(6) Асимптоте:

$x = 6$ је вертикална асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

$y = x - 1$ је коса асимптота.

(7) График функције:



2. Крамерова теорема на принципу система две једначине са две непознате.
решење:

3. Њутн–Лајбницова теорема о вези између одређеног и неодређеног интеграла.
решење:

4. Условна вероватноћа.
решење:

5. Израчунати површину ограничену луком функције и $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x-6}$ и њеном косом асимптотом над $[8, 9]$.
решење:

$P = 4 \ln 2$

6. Израчунати интеграл

$$\iint\limits_D xe^{y^2}\,dx\,dy$$

где је област D унутрашњост ограничена кривама $y = x^2$, $x = 0$ и $y = 4$ у I квадранту.
решење:

$$I = \frac{1}{4}(e^{16} - 1)$$

7. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2$$

решење:
Тачка $M(6, 7)$ је локални максимум, где је $z_{max} = 129$.

8. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = x^2 y, \quad uslov : 2x + y = 3$$

решење:

Тачка $M(0, 3), \lambda = 0$, је локални минимум, где је $z_{min} = 0$.
Тачка $N\,(1, 1)\,, \lambda = -1$, је локални максимум, где је $z_{max} = 1$.

9. Наћи опште решење диференцне једначине $3y_{t+1} + 2y_t = 1$. Одредити партикуларно решење уз услов $y_0 = 0$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.
решење:

$$y = C_1 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \frac{1}{5}$$

$$y_p^t = -\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^t + \frac{1}{5}$$

$$\lim_{t \to +\infty} y_p^t = \frac{1}{5}$$

10. Решити диференцијалну једначину

$$y'x + y\ln x = y + y\ln y$$

решење:

$y(x) = x \cdot e^{C_1 \cdot x}$

11. Дискутовати решење система једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & - & 3y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & 3y & - & (a+1)z & = & 2 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & a \end{array}$$

решење:

1. За $a \neq 1$ систем има јединствено решење: $(x, y, z) = \left\{\left(\frac{a-4}{1-1}, \frac{a^2+2a}{3-3a}, \frac{a+2}{1-a}\right)\right\}$.

2. За $a = 1$ систем нема решења: $(x, y, z) = \emptyset$.

12. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & 6z & = & 1 \end{array}$$

решење:

Систем нема решења: $(x, y, z) = \emptyset$.

13. Наћи први извод функције

$f(x) = \arctan(3x^4 + 1)$

решење:

$$f'(x) = \frac{12x^3}{(3x^4+1)^2 + 1}$$