Економски факултет
Јануар 2023.
Група 0404

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

09. Јануара 2023. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из Јануара 2023. године. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

Задаци

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 6x + 8}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow$ ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = \ln\sqrt{8} \rightarrow A\left(0, \ln\sqrt{8}\right)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B\left(3+\sqrt{2}, 0\right), C\left(3-\sqrt{2}, 0\right)$$

$$f(x) > 0 \; za \; x \in \left(-\infty, 3-\sqrt{2}\right) \cup \left(3+\sqrt{2}, +\infty\right)$$

$$f(x) < 0 \; za \; x \in \left(3-\sqrt{2}, 2\right) \cup \left(4, 3+\sqrt{2}\right)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{x-3}{x^2-6x+8}$$

$$f(x) \downarrow \; za \; x \in (-\infty, 2)$$

$$f(x) \uparrow \; za \; x \in (4, +\infty)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{-x^2+6x-10}{(x^2-6x+8)^2}$$

$$f(x) \, je \, konkavna \, za \; x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$$

$$p.t. : \; nema$$

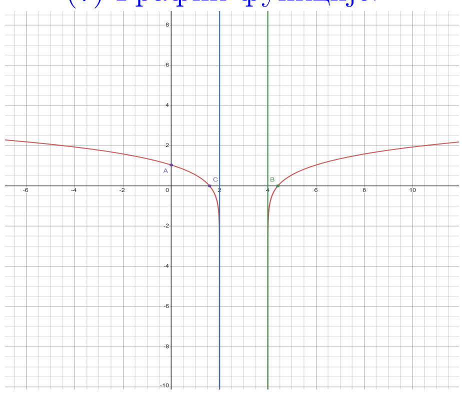
(6) Асимптоте:

$x = 2 \wedge x = 4$ су вертикалне асимптоте.

Нема хоризонталних асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Навести и доказати теорему о логаритамском диференцирању.
решење:

3. Навести и доказати теорему о изводу количника две функције.
решење:

4. Описати основне форме несвојственог интеграла.
решење:

5. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^2-2x+2}{e^x}\,dx$$

решење:

$$I=-\left(x^2+2\right)e^{-x}+C$$

6. Израчунати интеграл

$$I=\iint\limits_D xy\,dx\,dy$$

где је област D ограничена кривом $x^2+y^2=8y-12$ у I квадранту .

решење:

$$I=\frac{64}{3}$$

7. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y)=xy+\frac{48}{x}+\frac{36}{y}$$

решење:

Тачка $M(4,3)$ је локални минимум, где је $z_{min}=36$.

8. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y)=x-y,\quad uslov: x^2-y^2=2$$

решење:
Нема стационарних тачака, па нема ни екстремних вредности.

9. Наћи опште решење диференцне једначине $21y_{t+2}-4y_{t+1}-y_t=32$. Одредити партикуларно решење уз услове $y_0=1$ и $y_1=-1$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.
решење:

$$y_t=C_1\left(\frac{1}{3}\right)^t+C_2\left(-\frac{1}{7}\right)^t+2$$

$$y_p=-\frac{33}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^t+\frac{28}{5}\left(-\frac{1}{7}\right)^t+2$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{33}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^t+\frac{28}{5}\left(-\frac{1}{7}\right)^t+2\right)=2$$

10. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$xy' + 2y = \sqrt{y}$$

решење:

$$y = \frac{1}{x^2}\left(C + \frac{1}{2}x\right)^2$$

11. Дискутовати решење система линеарних једначина у зависности од реалног параметра k.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 6y & + & kz & = & 0 \\ -x & + & 7y & + & 5z & = & 0 \\ (k-6)x & + & 5y & + & 13z & = & 0 \end{array}$$

решење:

1. За $k \neq -\frac{3}{7} \wedge k \neq 10$ систем има јединствено решење: $(x, y, z) = \{(0,0,0)\}$.

2. За $k = -\frac{3}{7}$ систем има бесконачно много решења: $(x, y, z) = \left\{\left(\frac{33}{20}\alpha, -\frac{67}{140}\alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in R\right\}$.

3. За $k = 10$ систем има бесконачно много решења: $(x, y, z) = \{(-2\alpha, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in R\}$.

12. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & 6z & = & 3 \\ 2x & - & 3y & + & 6z & = & 1 \end{array}$$

решење:

Систем има јединствено решење : $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

13. Наћи први извод функције

$$f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$$

решење:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$$