Економски факултет
Јануар 2023.
Група 0303

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

09. Јануара 2023. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из Јануара 2023. године. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

Задаци

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln(x^2 - 6x + 10)$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$Df : x \in (-\infty, +\infty)$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow$ ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$f(0) = 0 \rightarrow A(0, \ln 10)$

$f(x) = 0 \rightarrow B(3, 0)$

$f(x) > 0 \; za \; x \in (-\infty, +\infty)$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10}$$

$f(x) \downarrow \; za \; x \in (-\infty, 3)$

$f(x) \uparrow \; za \; x \in (3, +\infty)$

$min : \; M(3, 0)$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - 6x + 8)}{x^2 - 6x + 10}$$

$f(x) \, je \cap \; za \; x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

$f(x) \, je \cup \; za \; x \in (2, 4)$

$p.t. : \; P_1(2, \ln 2), \; P_2(4, \ln 2)$

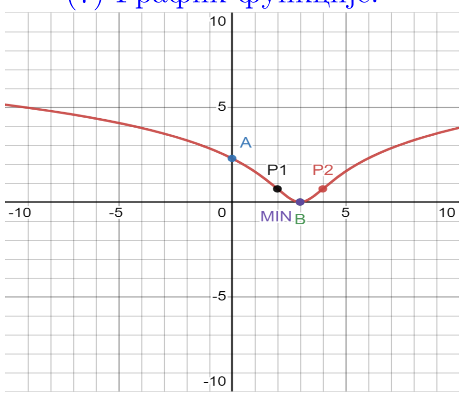
(6) Асимптоте:

Нема вертикалних асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Да ли је и како могуће применити Крамерово правило уколико је матрица сингуларна?

решење:
Сингуларна матрица је она матрица која није регуларна, односно то је матрица чија је детерминанта једнака нули. Крамерово правило се може примењивати у случају када матрица система линеарних једначина није регуларна. Полази се од неког базисног минора тога система као основе за његово решење.Пример који илуструје исказано:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & 3y & + & 5z & = & 5 \end{array}$$

Како је $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix} = 0$, посматраћемо систем $\begin{array}{rcrcrcr} -2y & + & 3z & = & 2 & - & 2x \\ y & - & z & = & 1 & + & x \end{array}$, одакле ћемо узети да је $x = \alpha$, па је решење система: $\{(x, y, z) = (\alpha, -\alpha - 5, -4) \mid \alpha \in R\}$.

3. Диференцне једначине првог реда?
решење:

4. Алгебра случајних догађаја?
решење:

5. Израчунати несвојствени интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

решење:

$$I = \frac{\pi}{2}$$

6. Апроксимирати функцију $z = e^{3x} \operatorname{arctg} 2y$ Маклореновим полиномом другог степена.
решење:

$$f(x, y) = 2y + 6xy$$

7. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = \frac{x^2}{144} + \frac{y^3}{216} - \frac{xy}{72} - \frac{x}{12}$$

решење:

Тачка $M(9, 3)$, је локални минимум, где је $z_{min} = -\frac{7}{16}$.
Тачка $N(4, -2)$ је седласта тачка.

8. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad uslov : 18x^2 + 18y^2 = x^2y^2$$

решење:

Тачка $M(-6, -6), \lambda = \frac{1}{6}$, је локални минимум, где је $z_{min} = -\frac{1}{3}$.
Тачка $N(6, 6), \lambda = -\frac{1}{6}$, је локални максимум, где је $z_{max} = \frac{1}{3}$.

9. Наћи опште решење диференцне једначине $12y_{t+2}+y_{t+1}-6y_t = 7$. Одредити партикуларно решење уз услове $y_0 = 1$ и $y_1 = 0$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.

решење:

$$y = C_1\left(\frac{2}{3}\right)^t + C_2\left(-\frac{3}{4}\right)^t + 1$$

$$y_p = -\frac{12}{17}\left(\frac{2}{3}\right)^t + \frac{12}{17}\left(-\frac{3}{4}\right)^t + 1$$

$$\lim_{t\to+\infty} y_p = 1$$

10. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' = x + \sin 2x$$

решење:

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + \frac{-x^2-x}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x$$

11. Решити матричну једначину $XA = X + A$, где је

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

решење:

$$X = -31\begin{bmatrix} -21 & 3 & 1 \\ -1 & -22 & 3 \\ -3 & -4 & -22 \end{bmatrix}$$

12. Решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & 6z & = & 1 \end{array}$$

решење:

Систем има јединствено решење : $(x, y, z) = (1, 11, -4)$

13. Наћи први извод функције

$$f(x) = \text{arctg}\left(3x^4 + 1\right)$$

решење:

$$f'(x) = \frac{12x^3}{(3x^4+1)^2 + 1}$$