Економски факултет
Јануар 2023.
Група 0202

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

09. Јануара 2023. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из јануарског рока 2023 године. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{2 - \ln(3-x)}{x-3}$$

---

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, 3)$$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow$ ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = 0 \rightarrow A\left(0, \frac{2-\ln 3}{-3}\right)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(3-e^2, 0)$$

$$f(x) > 0 \; za \; x \in (-\infty, 3-e^2)$$

$$f(x) < 0 \; za \; x \in (3-e^2, 3)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{-3+\ln(3-x)}{(x-3)^2}$$

$$f(x) \uparrow \; za \; x \in \left(-\infty, 3-e^3\right)$$

$$f(x) \downarrow \; za \; x \in (3-e^3, 3)$$

$$max: \; M\left(3-e^3, \frac{1}{e^3}\right)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{7-2\ln(3-x)}{(x-3)^3}$$

$$f(x) \, je \cup \, za \; x \in (-\infty, 3-\sqrt{e^7})$$

$$f(x) \, je \cap \, za \; x \in (3-\sqrt{e^7}, 3)$$

$$p.t.: \; P\left(3-\sqrt{e^7}, \frac{3}{2\sqrt{e^7}}\right)$$

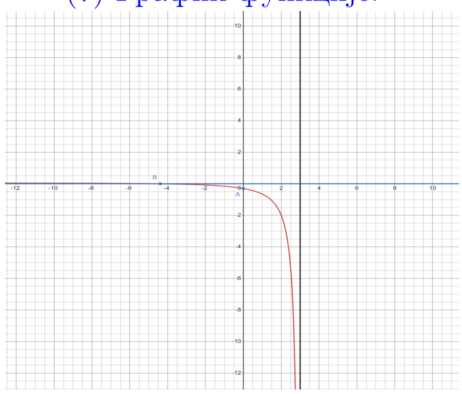
(6) Асимптоте:

$x = 3$ је коса асимптота.

$y = 0$ је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Формулисати и доказати Кронекер-Капелијеву теорему на примеру система две једначине са две непознате.

решење:

3. Навести и доказати теорему о логаритамском диференцирању.
решење:

4. Формулисати и доказати теорему на којој се заснива метод парцијалне интеграције.
решење:

5. Израчунати интеграл

$$\int \frac{9x^3-6x^2+7x-4}{x^4-x^3+x^2-x}\,dx$$

решење:

$$I = 4\ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln(x^2+1) + C$$

6. Израчунати интеграл

$$I = \iint\limits_D xy\,dx\,dy$$

где је област D ограничена кривом $x^2+y^2+7=2x-6y$ у III квадранту .

решење:

$$I = \#$$

7. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{x^3}{144} + \frac{y^2}{216} - \frac{xy}{72} - \frac{x}{12}$$

решење:

Тачка $M(3,9)$, је локални минимум, где је $z_{min} = -\frac{7}{16}$.
Тачка $N(-2,4)$ је седласта тачка.

8. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = x+y, \quad uslov : 2x^2+2y^2 = 3$$

решење:

Тачка $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, је локални минимум, где је $z_{min} = -\sqrt{3}$.

Тачка $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$, је локални максимум, где је $z_{max} = \sqrt{3}$.

9. Наћи опште решење диференцне једначине $9y_{t+2}+9y_{t+1}+2y_t = 2$. Одредити партикуларно решење уз услове $y_0 = 1$ и $2y_1 = -1$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.

решење:

$$y_t = C_1\left(-\frac{1}{3}\right)^t + C_2\left(-\frac{2}{3}\right)^t + \frac{1}{10}$$

$$y_t^p = \frac{9}{10}\left(-\frac{2}{3}\right)^t + \frac{1}{10}$$

$$\lim_{t\to+\infty} y_t^p = \frac{1}{10}$$

10. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'x + y\ln x = y + y\ln y$$

решење:

$$y = xe^{C_1 x}$$

11. Дискутовати решење система линеарних једначина у зависности од реалног параметра k.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 6y & + & kz & = & 0 \\ -x & + & 7y & + & 5z & = & 0 \\ (k-6)x & + & 5y & + & 13z & = & 0 \end{array}$$

решење:

1. За $k \neq -\frac{3}{7} \wedge k \neq 10$ систем има јединствено решење: $(x,y,z) = \{(0,0,0)\}$.
2. За $k = -\frac{3}{7}$ систем има бесконачно много решења: $(x,y,z) = \left\{\left(\frac{33}{20}\alpha, -\frac{67}{140}\alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in R\right\}$.
3. За $k = 10$ систем има бесконачно много решења: $(x,y,z) = \{(-2\alpha, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in R\}$.

12. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 6y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & - & 6y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

решење:

Систем има јединствено решење : $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

13. Наћи први извод функције

$$f(x) = e^{3x^4}$$

решење:

$$f'(x) = 12x^3e^{3x^4}$$