# Економски факултет
# Јануар 2023.
# Група 0101

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

09. Јануара 2023. у Београду

## Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из Јануара 2023. године. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

**Напомена:** ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

# Задаци

**1.** Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x)=\frac{x^2-9x+4}{x-7}$$

---

(1) Домен дефинисаности:

$$Df: x\in(-\infty,7)\cup(7,+\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x)\neq -f(x)\neq f(x)\Rightarrow$ ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$$f(0)=0\rightarrow A\left(0,-\frac{4}{7}\right)$$

$$f(x)=0\rightarrow B\left(\frac{9-\sqrt{65}}{2},0\right),C\left(\frac{9+\sqrt{65}}{2},0\right)$$

$$f(x)>0\ za\ x\in\left(-\infty,\frac{9-\sqrt{65}}{2}\right)\cup\left(\frac{9+\sqrt{65}}{2},+\infty\right)$$

$$f(x)<0\ za\ x\in\left(\frac{9-\sqrt{65}}{2},\frac{9+\sqrt{65}}{2}\right)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x)=\frac{x^2-14x+59}{(x-7)^2}$$

$$f(x)\uparrow\ za\ x\in(-\infty,7)\cup(7,+\infty)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x)=\frac{-20}{(x-7)^3}$$

$$f(x)\ je\ \cup\ za\ x\in(-\infty,7)$$

$$f(x)\ je\ \cap\ za\ x\in(7,+\infty)$$

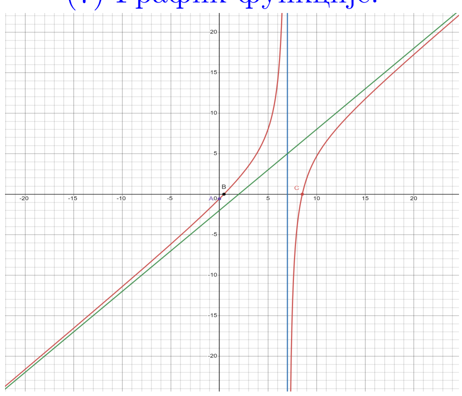
(6) Асимптоте:

$x=7$ је вертикална асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

$y=x-2$ је коса асимптота.

(7) График функције:



**2.** Навести и доказати Болцано-Вајерштрасову теорему о низовима и прву Болцано-Кошијеву теорему о непрекидним функцијама. Коментарисати везе између ове две теореме.

**решење:**

**3.** Навести и доказати теорему о изводу количника две функције.

**решење:**

**4.** Описати основне форме несвојственог интеграла.

**решење:**

**5.** Израчунати несвојствени интеграл

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

**решење:**

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x - \operatorname{arctg} x}{2} + C$$

**6.** Променити поредак интеграције код двојног интеграла

$$\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e} f(x,y) dy$$

**решење:**

$$\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x,y) dx$$

**7.** Одредити локалне екстремне вредности функције за $xy \neq 0$

$$z(x,y) = \frac{-x^2y - 4y + xy^2 + x}{xy}$$

**решење:**

Тачка $M(1,2)$ је седласта тачка, није екстрем.
Тачка $N(1,-2)$ је локални минимум, где је $z_{min} = 6$.
Тачка $P(-1,2)$ је локални максимум, где је $z_{max} = -6$.
Тачка $Q(-1,-2)$ је седласта тачка, није екстрем.

**8.** Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3x + y, \quad uslov : 9x^2 + y^2 = 18$$

**решење:**

Тачка $M(1,3), \lambda = -\frac{1}{6}$, је локални максимум, где је $z_{max} = 6$.
Тачка $N(-1,-3), \lambda = -\frac{1}{6}$, је локални минимум, где је $z_{min} = -6$.

**9.** Наћи опште решење диференцне једначине $2y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 1$. Одредити партикуларно решење уз услове $y_0 = 0$ и $y_1 = -\frac{1}{2}$ и кометарисати његово понашање када се параметар $t$ неограничено увећава.

**решење:**

$$y_t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1$$

$$y_p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1$$

$$\lim_{t\to+\infty} y_p = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1\right) = 1$$

**10.** Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$xy' + 2y = \sqrt{y}$$

**решење:**

$$y = \frac{1}{x^2}\left(C + \frac{1}{2}x\right)^2$$

**11.** Зависно од вредности реалног парамтетра $a$ дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

**решење:**

1. За $a \neq 1 \land a \neq -2$ систем има јединствено решење: $(x,y,z) = \left\{\left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2}\right)\right\}$.

2. За $a = -2$ систем нема решења: $(x,y,z) = \emptyset$.

3. За $a = 1$ систем има бесконачно много решења: $(x,y,z) = \{(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \,|\, \alpha, \beta \in R\}$.

**12.** Решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & 6z & = & 3 \\ 2x & - & 3y & + & 6z & = & 1 \end{array}$$

**решење:**

Систем има јединствено решење : $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

**13.** Наћи први извод функције

$$f(x) = \ln(\operatorname{tg} x)$$

**решење:**

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$$