Економски факултет
Фебруар 2024.
група 2312

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

29. Фебруара, 2024. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из фебруара 2024. године, група 2312. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

Задаци

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 7}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, 7) \cup (7, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow$ ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = \frac{6}{7} \rightarrow A\left(0, \frac{6}{7}\right)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow B(3, 0),\ C(-2, 0)$$

$$f(x) < 0 \ za \ x \in (-\infty, -2) \cup (3, 7)$$

$$f(x) > 0 \ za \ x \in (-2, 3) \cup (7, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 14x + 13}{(x-7)^2}$$

$$f(x) \uparrow \ za \ x \in (-\infty, 1) \cup (13, +\infty)$$

$$f(x) \downarrow \ za \ x \in (1, 7) \cup (7, 13)$$

$$min : M_1\left(13, \frac{151}{6}\right), \quad max : M_2(1, 1)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{72}{(x-7)^3}$$

$$f(x)\ je \cap \ za \ x \in (-\infty, 7)$$

$$f(x)\ je \cup \ za \ x \in (7, +\infty)$$

$$p.t. \ \ nema$$

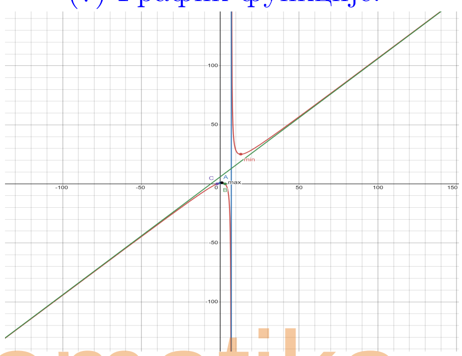
(6) Асимптоте:

$x = 7$ је вертикална асимптота.

Нема хоризонталних асимптота.

$y = x + 6$ је коса асимптота.

(7) График функције:



2. Да ли је и како могуће применити Крамерово правило уколико је матрица сингуларна?

решење:

Сингуларна матрица је она матрица која није регуларна, односно то је матрица чија је детерминанта једнака нули. Крамерово правило се може примењивати у случају када матрица система линеарних једначина није регуларна. Полази се од неког базисног минора тога система као основе за његово решење.Пример који илуструје исказано:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & 3y & + & 5z & = & 5 \end{array}$$

Како је $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix} = 0$, посматраћемо систем $\begin{array}{rcrcrcl} -2y & + & 3z & = & 2 & - & 2x \\ y & - & z & = & 1 & + & x \end{array}$, одакле ћемо узети да је $x = \alpha$, па је решење система: $\{(x, y, z) = (\alpha, -\alpha - 5, -4) \mid \alpha \in R\}$.

3. Дефинисати непрекидну и диференцијабилну реалну функцију једне променљиве. Који је каузални однос између непрекидности и диференцијабилности?

решење:

Непрекидност: Појам непрекидности се базира на појму граничне вредности функције. Кажемо да је функција f непрекидна у тачки a ако је:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Функција је непрекидна на скупу (a, b)ако је непрекидна у свакој тачки тога скупа.

Диференцијабилност: Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке x и нека је $h \neq 0$ реалан број, такав да тачка $x + h$ припада посматраној околини таче x. Тада граничну вредност $\lim\limits_{h \to 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ означавамо са $f'(x)$ и називамо првим изводом функције f у тачки x. Ако је $f'(x)$ коначна вредност, кажемо да је функција f диференцијабилна у тачки x.

Каузални однос: Ако је функција f диференцијабилна у некој тачки x, онда је функција f и непрекидна у тој тачки, односно, из диференцијабилности следи непрекидност, али обрнуто не важи.

4. Шта значи да низ конвергира? Навести и доказати две Кошијеве теореме које се односе на конвергенцију низова.

решење:

5. Израчунати површину ограничену луком функције и $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 7}$ и њеном косом асимптотом над $[8, 9]$.

решење:

$$P = 36 \ln 2$$

6. У зависности од вредности реалног параметра a, испитати конвергенцију интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{(a+1)^2}}$$

решење:

$$I = \frac{1}{a(a+2)}$$

7. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 6xy + (4x + 3y)(47 - x - y)$$

решење:

Тачка $M(21, 20)$ је локални максимум, где је $z_{max} = 3384$.

8. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = \frac{xy}{4} + 2, \quad uslov : x - 2y = 4$$

решење:

Тачка $M(2, -1), \lambda = \frac{1}{4}$, је локални минимум, где је $z_{min} = \frac{3}{2}$.

9. Наћи опште решење диференцне једначине $6y_{t+2} + 37y_{t+1} + 6y_t = 49$. Одредити партикуларно решење уз услов $y_0 = 0$ и $y_1 = 3$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.

решење:

$$y = C_1 \left(-\frac{1}{6}\right)^t + C_2 \left(-6\right)^t + 1$$

$$y_p^t = -\frac{24}{35}\left(-\frac{1}{6}\right)^t - \frac{11}{35}\left(-6\right)^t + 1$$

$$\lim_{t \to +\infty} y_p^t = ne\ postoji$$

10. Решити диференцијалну једначину

$$y'' - 2y' - 3y = e^x \cos 2x$$

решење:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{e^x \cos 2x}{8}$$

11. Дискутовати решење система једначина

$$\begin{array}{rcccccl} 4x & + & (a+3)y & + & 4z & = & 14 \\ -2x & + & (7-3a)y & + & (a-6)z & = & -7 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 7 \end{array}$$

1. За $a \neq 3 \wedge a \neq 4$ систем има јединствено решење: $(x, y, z) = \left\{\left(\frac{7}{2}, 0, 0\right)\right\}$.

2. За $a = 3$ систем има бесконачно много решења: $(x, y, z) = \left\{\left(\frac{7-5\alpha}{2}, \alpha, \alpha\right) \mid \alpha \in R\right\}$.

3. За $a = 4$ систем има бесконачно много решења: $(x, y, z) = \left\{\left(\frac{7-\alpha}{2}, 0, \alpha\right) \mid \alpha \in R\right\}$.

12. Решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 6y & + & 3z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 6y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

решење:

Систем има јединствено решење: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

13. Израчунати интеграл

$$f(x) = \int xe^x \, dx$$

решење:

$$I = (x-1)e^x + C$$