Економски факултет
Фебруар 2023.
Група 3737

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

27. Јануара 2023. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из фебруара 2023. године. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

Задаци

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow$ ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$$f(x) = 0 \rightarrow A\left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

$$f(x) > 0 \; za \; x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$$

$$f(x) < 0 \; za \; x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{x^2(1 - lnx)^2)}$$

$$f(x) \uparrow \; za \; x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{2\ln x(\ln^2 x - \ln x + 2)}{x^3(1-\ln x)^3}$$

$$f(x)\, je\, konkavna\, za \; x \in (0, 1) \cup (e, +\infty)$$

$$f(x)\, je\, konveksna\, za \; x \in (1, e)$$

$$p.t. : \;\; P(1, 1)$$

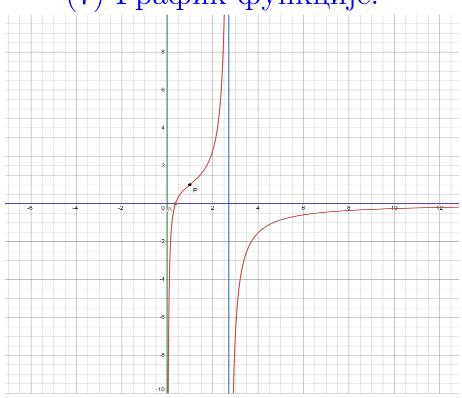
(6) Асимптоте:

$x = e \wedge x = 0$ су вертикалне асимптоте.

$y = 0$ је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Да ли је и како могуће применити Крамерово правило уколико је матрица система сингуларна?
решење:

3. Навести дефиницију конвексне функције и доказати основне теореме које се на њу односе.
решење:

4. Шта значи да низ конвергира? Навести и доказати две Кошијеве теореме које се односе на конвергенцију низова.
решење:

5. Израчунати интеграл

$$\int \arcsin x \, dx$$

решење:

$$I = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

6. Израчунати интеграл

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy$$

где је област D ограничена кривом $x^2 + y^2 = 8x - 12$ у I квадранту .
решење:

$$I = \frac{64}{3}$$

7. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 19x + 20y - x^2 - xy - y^2 + 2$$

решење:
Тачка $M(6, 7)$ је локални максимум, где је $z_{max} = 129$.

8. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x, y) = 2x + y, \quad uslov : 4x^2 + y^2 = 8$$

решење:
Тачка $M(1, 2), \lambda = -\frac{1}{4}$, је локални максимум, где је $z_{max} = 4$.
Тачка $N(-1, -2), \lambda = \frac{1}{4}$, је локални минимум, где је $z_{min} = -4$.

9. Наћи опште решење диференцне једначине $9y_{t+2}+3y_{t+1}-2y_t = 2$. Одредити партикуларно решење уз услове $y_0 = 1$ и $2y_1 = -1$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.
решење:

$$y_t = C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^t + C_2 \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \frac{1}{5}$$

$$y_p = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^t + \frac{29}{30} \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \frac{1}{5}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^t + \frac{29}{30} \left(-\frac{2}{3}\right)^t + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

10. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 2y' = 9xe^x + 5\sin x$$

решење:

$y = C_1 + C_2e^{-2x} + (3x-4)e^x - \sin x - 2\cos x$

11. Дискутовати решење система линеарних једначина у зависности од реалног параметра k.

$$\begin{array}{rcccccl} ax & + & (a-3)y & + & z & = & 0 \\ -x & + & ay & - & z & = & 0 \\ ax & - & 4y & + & az & = & 0 \end{array}$$

решење:

1. За $a \neq -1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -2$ систем има јединствено решење: $(x, y, z) = \{(0, 0, 0)\}$.

2. За $a = 1$ систем има бесконачно много решења: $(x, y, z) = \{(-\alpha, 0, \alpha) \,|\, \alpha \in R\}$.

3. За $a = 2$ систем има бесконачно много решења: $(x, y, z) = \{(-\alpha, \alpha, 3\alpha) \,|\, \alpha \in R\}$.

4. За $a = -2$ систем има бесконачно много решења: $(x, y, z) = \{(-7\alpha, 3\alpha, \alpha) \,|\, \alpha \in R\}$.

12. Решити систем једначина

$$\begin{array}{rcccccl} 2x & + & 6y & + & 3z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 6y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

решење:

Систем има јединствено решење : $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

13. Наћи први извод функције

$$y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$$

решење:

$$y' = \frac{x^3}{6\sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}\,(1 + x^4)^{\frac{3}{4}}\,\left(1 + \sqrt[4]{1 + x^4}\right)^{\frac{2}{3}}}$$