Економски факултет
Фебруар 2021.

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

05. Фебруара 2021. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из фебруара 2021. године. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

Задаци

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = e^{x-e^x}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$$Df : x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) \neq -f(x) \neq f(x) \Rightarrow$ ни парна, ни непарна.

(3) Нуле и знак:

$$f(0) = \frac{1}{e} \to A\left(0, \frac{1}{e}\right)$$

$$f(x) > 0 \ za \ x \in (-\infty, +\infty)$$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = e^{x-e^x}(1-e^x)$$

$$f(x) \uparrow \ za \ x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) \downarrow \ za \ x \in (0, +\infty)$$

$$max : M\left(0, \frac{1}{e}\right)$$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = e^{x-e^x}(1-3e^x+e^{2x})$$

$$f(x) \ je \cap \ za \ x \in \left(\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$f(x) \ je \cup \ za \ x \in \left(-\infty, \ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

$$p.t. \ P_1\left(\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right), P_2\left(\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

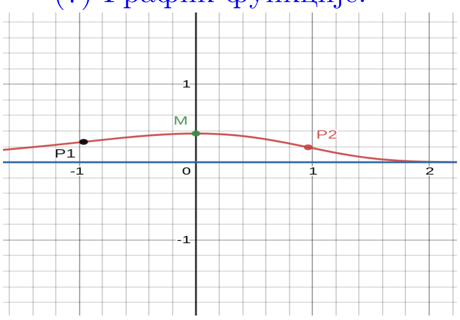
(6) Асимптоте:

Нема вертикалних асимптота.

$y = 0$ је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Израчунати несвојствени интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

решење:

$$I = \frac{\pi}{2}$$

3. Наћи опште решење диференцне једначине $2y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 1$. Одредити партикуларно решење уз услове $y_0 = 0$ и $y_1 = -\frac{1}{2}$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.

решење:

$$y_t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1$$

$$y_p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1$$

$$\lim_{t\to+\infty} y_p = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + 1\right) = 1$$

4. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad uslov : 18x^2 + 18y^2 = x^2y^2$$

решење:

Тачка $M(6,6), \lambda = -\frac{1}{6}$ је локални максимум, где је $z_{max} = \frac{1}{3}$.
Тачка $N(-6,-6), \lambda = \frac{1}{6}$ је локални минимум, где је $z_{min} = -\frac{1}{3}$.

5. Решити систем једначина и одредити бар два базисна минора

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 8 \\ -2x & - & 4y & + & 2z & = & -16 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 8 \end{array}$$

решење:

Систем има бесконачно много решења : $(x,y,z) = \left\{\left(0, \frac{16+\alpha}{4}, \alpha\right) \mid \alpha \in R\right\}$

Базисни минори:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$