Економски факултет
Април 2022.
група НОВИ НАЧИН

www.ekof-matematika.rs
IG: ekof_matematika

23. Априла 2022. у Београду

Предговор

У овом документу можете пронаћи решења испита из априла 2022. године, група НОВИ НАЧИН. Свако решење задатака је софтверски проверено. Аутори ових решења су сајт www.ekof-matematika.rs и инстаграм ekof_matematika. Одговоре на теоријска питања можете пронаћи на нашем сајту. У случају било каквих питања или примедби, можете нам се обратити путем инстаграма или на нашем сајту.

Напомена: ово није званични сајт математике на Економском факултету у Београду. Задаци су добијени од стране студената који су изашли на испит.

С поштовањем,
Аутори

Задаци

1. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{4x}{4+x^2}$$

решење:

(1) Домен дефинисаности:

$Df : x \in (-\infty, +\infty)$

(2) Парност/Непарност:

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ непарна функција.

(3) Нуле и знак:

$f(0) = 0 \to A(0,0)$

$f(x) = 0 \to B(0,0)$

$f(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, 0)$

$f(x) > 0 \; za \; x \in (0, +\infty)$

(4) Монотоност и екстремне вредности:

$$f'(x) = \frac{16-4x^2}{(4+x^2)^2}$$

$f(x) \uparrow \; za \; x \in (-2, 2)$

$f(x) \downarrow \; za \; x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$min : M_1(-2, -1), \;\; max : M_2(2, 1)$

(5) Конвексност, конкавност и превојне тачке:

$$f''(x) = \frac{8x(x^2-12)}{(4+x^2)^3}$$

$f(x) \; je \cap \; za \; x \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(0, 2\sqrt{3}\right)$

$f(x) \; je \cup \; za \; x \in \left(-2\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$

$$p.t. \; P_1\left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2(0,0), P_3\left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

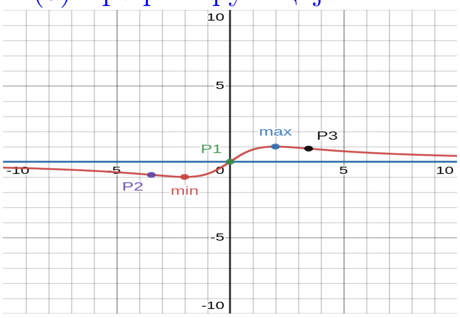
(6) Асимптоте:

Нема вертикалних асимптота.

$y = 0$ је хоризонтална асимптота.

Нема косих асимптота.

(7) График функције:



2. Да ли је и како могуће применити Крамерово правило уколико је матрица сингуларна?

решење:

Сингуларна матрица је она матрица која није регуларна, односно то је матрица чија је детерминанта једнака нули. Крамерово правило се може примењивати у случају када матрица система линеарних једначина није регуларна. Полази се од неког базисног минора тога система као основе за његово решење.Пример који илуструје исказано:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & 3y & + & 5z & = & 5 \end{array}$$

Како је $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix} = 0$, посматраћемо систем $\begin{array}{rcrcccc} -2y & + & 3z & = & 2 & - & 2x \\ y & - & z & = & 1 & + & x \end{array}$, одакле ћемо узети да је $x = \alpha$, па је решење система: $\{(x, y, z) = (\alpha, -\alpha - 5, -4) \mid \alpha \in R\}$.

3. Дефинисати непрекидну и диференцијабилну реалну функцију једне променљиве. Који је каузални однос између непрекидности и диференцијабилности?

решење:

Непрекидност: Појам непрекидности се базира на појму граничне вредности функције. Кажемо да је функција f непрекидна у тачки a ако је:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Функција је непрекидна на скупу (a, b)ако је непрекидна у свакој тачки тога скупа.

Диференцијабилност: Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке x и нека је $h \neq 0$ реалан број, такав да тачка $x + h$ припада посматраној околини таче x. Тада граничну вредност $\lim\limits_{h \to 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ означавамо са $f'(x)$ и називамо првим изводом функције f у тачки x. Ако је $f'(x)$ коначна вредност, кажемо да је функција f диференцијабилна у тачки x.

Каузални однос: Ако је функција f диференцијабилна у некој тачки x, онда је функција f и непрекидна у тој тачки, односно, из диференцијабилности следи непрекидност, али обрнуто не важи.

4. Навести и доказати теорему о логаритамском диференцирању?

решење:

Теорема: Ако су u и v диференцијабилне функције у тачки x и $u(x) > 0$, онда је функција $y = u^v$ диференцијабила у тачки x и важи:

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

Доказ: Логаритмовањем леве и десне стране израза $y = u^v$, добија се $\ln y = v \ln u$. Сада можемо да урадимо извод овог израза, па се добија: $\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u'$. Сређивањем овог израза добија се коначан облик: $y' = u^v \left(v' \ln u + v \, \frac{u'}{u} \right)$.

5. Израчунати интеграл

$$I = \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$$

решење:

$$I = (x + 1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

6. Израчунати интеграл

$$I = \iint\limits_D dx\,dy$$

где је област D унутрашњост трапеза са теменима $A(-1,-1), B(6,-1), C(3,2)$ и $D(2,2)$.

решење:

$$I = \int_{-1}^{2} \int_{y}^{5-y} dx\,dy = 12.$$

7. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 2xy + y^2, \quad uslov: y + 3 = x$$

решење:

Тачка $M(2,-1), \lambda = -2$, је локални минимум, где је $z_{min} = -3$.

8. Одредити локалне екстремне вредности функције

$$z(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$$

решење:

Тачка $M(2,4)$, је локални минимум, где је $z_{min} = -8$.

9. Наћи опште решење диференцне једначине $21y_{t+2} - 4y_{t+1} - y_t = 32$. Одредити партикуларно решење уз услове $y_0 = 1$ и $2\,y_1 = -2$ и кометарисати његово понашање када се параметар t неограничено увећава.

решење:

$$y = C_1\left(\frac{1}{3}\right)^t + C_2\left(-\frac{1}{7}\right)^t + 2$$

$$y_p = -\frac{33}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^t + \frac{28}{5}\left(-\frac{1}{7}\right)^t + 2$$

$$\lim_{t\to+\infty} y_p = 2$$

10. Решити диференцијалну једначину

$$y'' + 2y' = 9xe^x + 5\sin x$$

решење:

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + (3x-4)e^x - \sin x - 2\cos x$$

11. Дискутовати решење система једначина

$$\begin{array}{ccccccc} 5x & + & (4a-4)y & + & (8-a)z & = & 11 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & (3a-3)y & + & (5-a)z & = & 5 \end{array}$$

решење:

1. За $a \neq 3 \wedge a \neq 4$ систем има јединствено решење: $(x,y,z) = \left\{\left(\frac{2a-5}{a-3}, a, \frac{1}{3-a}\right)\right\}$.

2. За $a = 3$ систем нема решења: $(x,y,z) = \emptyset$.

3. За $a = 4$ систем има бесконачно много решења: $(x,y,z) = \left\{\left(\frac{13-8\alpha}{7}, \frac{1+\alpha}{7}, \alpha\right) \mid \alpha \in R\right\}$.

12. Решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccc} 7x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 7x & + & 4y & + & 2z & = & 6 \\ 14x & + & 4y & + & 4z & = & 9 \end{array}$$

решење:

Систем има јединствено решење : $(x,y,z) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

13. Наћи први извод функције

$$y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$$

решење:

$$y' = \frac{x^3}{6\sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}\,(1+x^4)^{\frac{3}{4}}\left(1 + \sqrt[4]{1+x^4}\right)^{\frac{2}{3}}}$$